

Dualité de Schur-Weyl, algèbres de Hecke fusionnées

Soutenance de mémoire de recherche

DEMESMAY Yoann

Université de Strasbourg
yoann.demesmay@yahoo.fr

20 juin 2025

Stage réalisé au laboratoire mathématique de Reims sous la direction de :

POULAIN D'ANDECY Loïc
<https://poulain.perso.math.cnrs.fr>

- 1 Contexte historique
 - Quelques dates et pionniers de la théorie
- 2 Introduction
 - Résultats classiques
 - Représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$
- 3 La dualité de Schur-Weyl
 - Théorème du double commutant
 - La dualité de Schur-Weyl
- 4 Extension de la dualité
 - Algèbre des permutations fusionnées
 - Extension de la dualité
- 5 Conclusion



- Théorie des représentations.
- Fin XIX-ème.
- Dualité de SCHUR-WEYL (début du XXème siècle).
- Généralisation via une théorie récente (fin XXème-aujourd'hui) : les algèbres de HECKE (fusionnées).



- 1 Contexte historique
 - Quelques dates et pionniers de la théorie
- 2 Introduction
 - Résultats classiques
 - Représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$
- 3 La dualité de Schur-Weyl
 - Théorème du double commutant
 - La dualité de Schur-Weyl
- 4 Extension de la dualité
 - Algèbre des permutations fusionnées
 - Extension de la dualité
- 5 Conclusion

Définition

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbb{C}$. Une **représentation** de $\mathcal{A}$ est la donnée d'une paire (ρ, V) telle que :

- ❶ V est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
- ❷ $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \text{End}(V)$ est un morphisme d'algèbres. Elle est dite **irréductible** si elle n'admet pas de sous-espaces stables non triviaux.

Définition

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbb{C}$. Une **représentation** de $\mathcal{A}$ est la donnée d'une paire (ρ, V) telle que :

- 1 V est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
- 2 $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \text{End}(V)$ est un morphisme d'algèbres. Elle est dite **irréductible** si elle n'admet pas de sous-espaces stables non triviaux.

Définition

Un **morphisme de représentations** entre (ρ, V) et (τ, W) est la donnée d'un élément φ de $\text{Hom}(V, W)$ tel que :

$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad \tau(a) \circ \varphi = \varphi \circ \rho(a).$$

Définition

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbb{C}$. Une **représentation** de $\mathcal{A}$ est la donnée d'une paire (ρ, V) telle que :

- 1 V est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
- 2 $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \text{End}(V)$ est un morphisme d'algèbres. Elle est dite **irréductible** si elle n'admet pas de sous-espaces stables non triviaux.

Définition

Un **morphisme de représentations** entre (ρ, V) et (τ, W) est la donnée d'un élément φ de $\text{Hom}(V, W)$ tel que :

$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad \tau(a) \circ \varphi = \varphi \circ \rho(a).$$

Notation : $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)$, $\text{End}_{\mathcal{A}}(V)$.

Définition

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbb{C}$. Une **représentation** de $\mathcal{A}$ est la donnée d'une paire (ρ, V) telle que :

- ❶ V est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
- ❷ $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \text{End}(V)$ est un morphisme d'algèbres. Elle est dite **irréductible** si elle n'admet pas de sous-espaces stables non triviaux.

Définition

Un **morphisme de représentations** entre (ρ, V) et (τ, W) est la donnée d'un élément φ de $\text{Hom}(V, W)$ tel que :

$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad \tau(a) \circ \varphi = \varphi \circ \rho(a).$$

Notation : $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)$, $\text{End}_{\mathcal{A}}(V)$.

Théorème (Schur)

Soient (ρ, V) et (τ, W) deux représentations irréductibles, où V et W sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ de dimension dénombrable. Alors :

$$\dim(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\rho, V) \cong (\tau, W) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème (Artin-Wedderburn)

Les algèbres semi-simples de dimension finie sont les sommes directes finies d'algèbres de la forme $End(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie. On a donc un isomorphisme d'algèbres :

$$\Phi : \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} End(V^\lambda)$$

où Λ est un ensemble fini.

Théorème (Artin-Wedderburn)

Les algèbres semi-simples de dimension finie sont les sommes directes finies d'algèbres de la forme $End(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie. On a donc un isomorphisme d'algèbres :

$$\Phi : \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} End(V^\lambda)$$

où Λ est un ensemble fini.

Exemple : Algèbre d'un groupe fini.

Théorème (Artin-Wedderburn)

Les algèbres semi-simples de dimension finie sont les sommes directes finies d'algèbres de la forme $End(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie. On a donc un isomorphisme d'algèbres :

$$\Phi : \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} End(V^\lambda)$$

où Λ est un ensemble fini.

Exemple : Algèbre d'un groupe fini.

Corollaire

Soit A une algèbre semi-simple de dimension finie. Alors on a l'égalité :

$$\dim(\mathcal{A}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim(V^\lambda)^2.$$

Théorème (Artin-Wedderburn)

Les algèbres semi-simples de dimension finie sont les sommes directes finies d'algèbres de la forme $\text{End}(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie. On a donc un isomorphisme d'algèbres :

$$\Phi : \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \text{End}(V^\lambda)$$

où Λ est un ensemble fini.

Exemple : Algèbre d'un groupe fini.

Corollaire

Soit A une algèbre semi-simple de dimension finie. Alors on a l'égalité :

$$\dim(\mathcal{A}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim(V^\lambda)^2.$$

Exemples : $G = \mathfrak{S}_3$: représentations triviale et signature. $\text{Card}(\Lambda) = 3$
 $\rightsquigarrow$ une représentation irréductible de dimension 2 (la représentation standard).

Théorème (Artin-Wedderburn)

Les algèbres semi-simples de dimension finie sont les sommes directes finies d'algèbres de la forme $\text{End}(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie. On a donc un isomorphisme d'algèbres :

$$\Phi : \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \text{End}(V^\lambda)$$

où Λ est un ensemble fini.

Exemple : Algèbre d'un groupe fini.

Corollaire

Soit A une algèbre semi-simple de dimension finie. Alors on a l'égalité :

$$\dim(\mathcal{A}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim(V^\lambda)^2.$$

Exemples : $G = \mathfrak{S}_3$: représentations triviale et signature. $\text{Card}(\Lambda) = 3$
 $\rightsquigarrow$ une représentation irréductible de dimension 2 (la représentation standard).

Questions : Quid pour $\mathfrak{S}_n$, $n \geq 4$? Représentations irréductibles de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$?

- 1 Contexte historique
 - Quelques dates et pionniers de la théorie
- 2 Introduction
 - Résultats classiques
 - Représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$
- 3 La dualité de Schur-Weyl
 - Théorème du double commutant
 - La dualité de Schur-Weyl
- 4 Extension de la dualité
 - Algèbre des permutations fusionnées
 - Extension de la dualité
- 5 Conclusion

Définition (Symétriseur de Young)

Soit λ une partition de n .

$$c_\lambda = \left(\sum_{\sigma \in R(T)} \delta_\sigma \right) \cdot \left(\sum_{\tau \in C(T)} \epsilon(\tau) \delta_\tau \right) \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_n.$$

Définition (Symétriseur de Young)

Soit λ une partition de n .

$$c_\lambda = \left(\sum_{\sigma \in R(T)} \delta_\sigma \right) \cdot \left(\sum_{\tau \in C(T)} \epsilon(\tau) \delta_\tau \right) \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_n.$$

Exemple : $\lambda = (2, 1)$, $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$,

$$c_\lambda = (Id_{\mathfrak{S}_3} + \delta_{(1,2)}) \cdot (Id_{\mathfrak{S}_3} - \delta_{(1,3)}) = Id_{\mathfrak{S}_3} - \delta_{(1,3)} + \delta_{(1,2)} - \delta_{(1,3,2)}.$$

Définition (Symétriseur de Young)

Soit λ une partition de n .

$$c_\lambda = \left(\sum_{\sigma \in R(T)} \delta_\sigma \right) \cdot \left(\sum_{\tau \in C(T)} \epsilon(\tau) \delta_\tau \right) \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_n.$$

Exemple : $\lambda = (2, 1)$, $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$,

$$c_\lambda = (Id_{\mathfrak{S}_3} + \delta_{(1,2)}) \cdot (Id_{\mathfrak{S}_3} - \delta_{(1,3)}) = Id_{\mathfrak{S}_3} - \delta_{(1,3)} + \delta_{(1,2)} - \delta_{(1,3,2)}.$$

Théorème

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathcal{P}_n$. Le $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ -module $V_\lambda := \mathbb{C}\mathfrak{S}_n \cdot c_\lambda$ est irréductible. De plus, si $\lambda \neq \mu \in \mathcal{P}_n$, les $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ -modules V_λ et V_μ ne sont pas isomorphes (comme $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ -modules).

Définition (Symétriseur de Young)

Soit λ une partition de n .

$$c_\lambda = \left(\sum_{\sigma \in R(T)} \delta_\sigma \right) \cdot \left(\sum_{\tau \in C(T)} \epsilon(\tau) \delta_\tau \right) \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_n.$$

Exemple : $\lambda = (2, 1)$, $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$,

$$c_\lambda = (Id_{\mathfrak{S}_3} + \delta_{(1,2)}) \cdot (Id_{\mathfrak{S}_3} - \delta_{(1,3)}) = Id_{\mathfrak{S}_3} - \delta_{(1,3)} + \delta_{(1,2)} - \delta_{(1,3,2)}.$$

Théorème

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathcal{P}_n$. Le $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ -module $V_\lambda := \mathbb{C}\mathfrak{S}_n \cdot c_\lambda$ est irréductible. De plus, si $\lambda \neq \mu \in \mathcal{P}_n$, les $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ -modules V_λ et V_μ ne sont pas isomorphes (comme $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ -modules).

Exemples :

- $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda = (n)$, $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} : c_T = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \delta_\sigma$. $\dim(V_\lambda) = 1$
 $\rightsquigarrow$ représentation triviale.

Définition (Symétriseur de Young)

Soit λ une partition de n .

$$c_\lambda = \left(\sum_{\sigma \in R(T)} \delta_\sigma \right) \cdot \left(\sum_{\tau \in C(T)} \epsilon(\tau) \delta_\tau \right) \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_n.$$

Exemple : $\lambda = (2, 1)$, $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$,

$$c_\lambda = (Id_{\mathfrak{S}_3} + \delta_{(1,2)}) \cdot (Id_{\mathfrak{S}_3} - \delta_{(1,3)}) = Id_{\mathfrak{S}_3} - \delta_{(1,3)} + \delta_{(1,2)} - \delta_{(1,3,2)}.$$

Théorème

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathcal{P}_n$. Le $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ -module $V_\lambda := \mathbb{C}\mathfrak{S}_n \cdot c_\lambda$ est irréductible. De plus, si $\lambda \neq \mu \in \mathcal{P}_n$, les $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ -modules V_λ et V_μ ne sont pas isomorphes (comme $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ -modules).

Exemples :

- $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda = (n)$, $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} : c_T = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \delta_\sigma$. $\dim(V_\lambda) = 1$

$\rightsquigarrow$ représentation triviale.

- $n = 3$, $\lambda = (2, 1)$, $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} : c_T = \delta_{Id_{\mathfrak{S}_3}} + \delta_{(1,2)} - \delta_{(1,3)} - \delta_{(1,3,2)}$.

$\dim(V_\lambda) = 2 \rightsquigarrow$ représentation standard.

Théorème ("Hook length formula")

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathcal{P}_n$. On a $\dim(V_\lambda) = \text{Card}(\text{STab}(\lambda)) = \frac{n!}{\prod_{(x,y) \in D_\lambda} h_\lambda(x,y)}$.

Théorème ("Hook length formula")

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathcal{P}_n$. On a $\dim(V_\lambda) = \text{Card}(STab(\lambda)) = \frac{n!}{\prod_{(x,y) \in D_\lambda} h_\lambda(x,y)}$.

Exemple :

- $n = 3 : \mathbb{C}\mathfrak{S}_3 \cong \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_2(\mathbb{C})$.

Théorème ("Hook length formula")

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathcal{P}_n$. On a $\dim(V_\lambda) = \text{Card}(STab(\lambda)) = \frac{n!}{\prod_{(x,y) \in D_\lambda} h_\lambda(x,y)}$.

Exemple :

- $n = 3$: $\mathbb{C}\mathfrak{S}_3 \cong \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_2(\mathbb{C})$.
- $n = 4$:
 - $\lambda = (4)$,  $\rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 1$.
 - $\lambda = (1, 1, 1, 1)$,  $\rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 1$.
 - $\lambda = (3, 1)$,  $\rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 3$.
 - $\lambda = (2, 2)$,  $\rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 2$.
 - $\lambda = (2, 1, 1)$,  $\rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 3$.

Théorème ("Hook length formula")

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathcal{P}_n$. On a $\dim(V_\lambda) = \text{Card}(STab(\lambda)) = \frac{n!}{\prod_{(x,y) \in D_\lambda} h_\lambda(x,y)}$.

Exemple :

- $n = 3$: $\mathbb{C}\mathfrak{S}_3 \cong \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_2(\mathbb{C})$.
- $n = 4$:
 - $\lambda = (4)$,  $\rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 1$.
 - $\lambda = (1, 1, 1, 1)$,  $\rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 1$.
 - $\lambda = (3, 1)$,  $\rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 3$.
 - $\lambda = (2, 2)$,  $\rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 2$.
 - $\lambda = (2, 1, 1)$,  $\rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 3$.

$$\mathbb{C}\mathfrak{S}_4 \cong \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})^{\oplus 2}.$$

Théorème ("Hook length formula")

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathcal{P}_n$. On a $\dim(V_\lambda) = \text{Card}(STab(\lambda)) = \frac{n!}{\prod_{(x,y) \in D_\lambda} h_\lambda(x,y)}$.

Exemple :

- $n = 3$: $\mathbb{C}\mathfrak{S}_3 \cong \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_2(\mathbb{C})$.
- $n = 4$:

- $\lambda = (4)$,  $\rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 1$.

- $\lambda = (1, 1, 1, 1)$,  $\rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 1$.

- $\lambda = (3, 1)$,  $\rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 3$.

- $\lambda = (2, 2)$,  $\rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 2$.

- $\lambda = (2, 1, 1)$,  $\rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 3$.

$$\mathbb{C}\mathfrak{S}_4 \cong \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})^{\oplus 2}.$$

- $n = 5$: $\mathbb{C}\mathfrak{S}_5 \cong \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_4(\mathbb{C})^{\oplus 2} \oplus M_5(\mathbb{C})^{\oplus 2} \oplus M_6(\mathbb{C})$.

- 1 Contexte historique
 - Quelques dates et pionniers de la théorie
- 2 Introduction
 - Résultats classiques
 - Représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$
- 3 La dualité de Schur-Weyl
 - Théorème du double commutant
 - La dualité de Schur-Weyl
- 4 Extension de la dualité
 - Algèbre des permutations fusionnées
 - Extension de la dualité
- 5 Conclusion

Définition

$$\text{Comm}(S) = \{x \in \text{End}(V) \mid x \circ s = s \circ x \quad \forall s \in S\}$$

Définition

$$\text{Comm}(S) = \{x \in \text{End}(V) \mid x \circ s = s \circ x \quad \forall s \in S\}$$

Proposition

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^k V_i^{\oplus m_i} \implies \text{End}_{\mathcal{A}}(V) \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{m_i}(\mathbb{C}).$$

Définition

$$\text{Comm}(S) = \{x \in \text{End}(V) \mid x \circ s = s \circ x \quad \forall s \in S\}$$

Proposition

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^k V_i^{\oplus m_i} \implies \text{End}_{\mathcal{A}}(V) \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{m_i}(\mathbb{C}).$$

$\mathcal{A} \subset \text{End}(V)$ une algèbre semi-simple, $\mathcal{B} := \text{Comm}(\mathcal{A})$.

$$\bigoplus_{i=1}^k V_i^{\oplus \dim(U_i)} \cong V \cong \bigoplus_{i=1}^k U_i^{\oplus \dim(V_i)}$$

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^k V_i \otimes U_i.$$

On rappelle qu'on a : $\mathcal{A} \cong \bigoplus_{i=1}^r \text{End}(V_i) \otimes I_{U_i}$.

Définition

$$\text{Comm}(S) = \{x \in \text{End}(V) \mid x \circ s = s \circ x \quad \forall s \in S\}$$

Proposition

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^k V_i^{\oplus m_i} \implies \text{End}_{\mathcal{A}}(V) \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{m_i}(\mathbb{C}).$$

$\mathcal{A} \subset \text{End}(V)$ une algèbre semi-simple, $\mathcal{B} := \text{Comm}(\mathcal{A})$.

$$\bigoplus_{i=1}^k V_i^{\oplus \dim(U_i)} \cong V \cong \bigoplus_{i=1}^k U_i^{\oplus \dim(V_i)}$$

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^k V_i \otimes U_i.$$

On rappelle qu'on a : $\mathcal{A} \cong \bigoplus_{i=1}^r \text{End}(V_i) \otimes I_{U_i}$.

Théorème (Double commutant)

L'algèbre $\mathcal{B}$ est semi-simple et $\text{Comm}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$. De plus, on a :

$$\mathcal{B} \cong \bigoplus_{i=1}^r I_{V_i} \otimes \text{End}(U_i).$$

- 1 Contexte historique
 - Quelques dates et pionniers de la théorie
- 2 Introduction
 - Résultats classiques
 - Représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$
- 3 La dualité de Schur-Weyl
 - Théorème du double commutant
 - La dualité de Schur-Weyl
- 4 Extension de la dualité
 - Algèbre des permutations fusionnées
 - Extension de la dualité
- 5 Conclusion

Proposition

Les $(\mathbb{S}_\lambda(V))_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$, où $\mathbb{S}_\lambda(V) := \text{Im} \left(c_\lambda \mid_{\bigotimes_k V} \right)$, sont ou bien nulles, ou bien des représentations irréductibles de $GL(V)$. De plus, on a :

$$\bigotimes_k V \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \mathbb{S}_\lambda(V)^{\oplus m_\lambda}$$

où $m_\lambda := \text{Card}(\text{STab}(\lambda))$.

Proposition

Les $(\mathbb{S}_\lambda(V))_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$, où $\mathbb{S}_\lambda(V) := \text{Im} \left(c_\lambda \mid_{\bigotimes^k V} \right)$, sont ou bien nulles, ou bien des représentations irréductibles de $GL(V)$. De plus, on a :

$$\bigotimes^k V \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \mathbb{S}_\lambda(V)^{\oplus m_\lambda}$$

où $m_\lambda := \text{Card}(\text{STab}(\lambda))$.

Exemples :

- $k = 2$, V de dimension deux.
 - $\lambda = (2)$, $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, $c_{T_1} = \delta_{Id_{\mathfrak{S}_2}} + \delta_{(1,2)} \rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda(V) = \text{Sym}^2(V)$.
 - $\lambda = (1, 1)$, $T_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $c_{T_2} = \delta_{Id_{\mathfrak{S}_2}} - \delta_{(1,2)} \rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda(V) = \text{Ant}^2(V)$.
- d'où $V \otimes V \cong \text{Sym}^2(V) \oplus \text{Ant}^2(V)$.

Proposition

Les $(\mathbb{S}_\lambda(V))_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$, où $\mathbb{S}_\lambda(V) := \text{Im} \left(c_\lambda \mid_{\bigotimes^k V} \right)$, sont ou bien nulles, ou bien des représentations irréductibles de $GL(V)$. De plus, on a :

$$\bigotimes^k V \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \mathbb{S}_\lambda(V)^{\oplus m_\lambda}$$

où $m_\lambda := \text{Card}(\text{STab}(\lambda))$.

Exemples :

- $k = 2$, V de dimension deux.
 - $\lambda = (2)$, $T_1 = \boxed{1 \ 2}$, $c_{T_1} = \delta_{\text{Id}_{\mathfrak{S}_2}} + \delta_{(1,2)} \rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda(V) = \text{Sym}^2(V)$.
 - $\lambda = (1, 1)$, $T_2 = \boxed{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}}$, $c_{T_2} = \delta_{\text{Id}_{\mathfrak{S}_2}} - \delta_{(1,2)} \rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda(V) = \text{Ant}^2(V)$.

d'où $V \otimes V \cong \text{Sym}^2(V) \oplus \text{Ant}^2(V)$.

- $k = 3$, V de dimension deux, $\{e_1, e_2\}$ une base de V .
 - $\lambda = (3) \rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda(V) = \text{Sym}^3(V)$.
 - $\lambda = (1, 1, 1) \rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda(V) = \text{Ant}^3(V) = \left\{ 0_{\bigotimes^3 V} \right\}$.
 - $\lambda = (2, 1)$, $T_3 = \boxed{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}}$, $c_\lambda = \delta_{\text{Id}_{\mathfrak{S}_3}} - \delta_{(1,3)} + \delta_{(1,2)} - \delta_{(1,3,2)}$
 $\rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda(V) = \text{Vect} \{ e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_1 \otimes e_2, e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 \}$.

Définition

$$\begin{aligned}
 \rho_k : GL(V) &\longrightarrow \text{End}(V^{\otimes k}) \\
 g &\longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} V^{\otimes k} & \longrightarrow & V^{\otimes k} \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_k & \longmapsto & gv_1 \otimes \dots \otimes gv_k \end{array} \right. \\
 \\
 \sigma_k : \mathfrak{S}_k &\longrightarrow \text{End}(V^{\otimes k}) \\
 s &\longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} V^{\otimes k} & \longrightarrow & V^{\otimes k} \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_k & \longmapsto & v_{s^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{s^{-1}(k)} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Définition

$$\begin{aligned}
 \rho_k : \quad GL(V) &\longrightarrow \quad End(V^{\otimes k}) \\
 g &\longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} V^{\otimes k} & \longrightarrow & V^{\otimes k} \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_k & \longmapsto & gv_1 \otimes \dots \otimes gv_k \end{array} \right. \\
 \\
 \sigma_k : \quad \mathfrak{S}_k &\longrightarrow \quad End(V^{\otimes k}) \\
 s &\longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} V^{\otimes k} & \longrightarrow & V^{\otimes k} \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_k & \longmapsto & v_{s^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{s^{-1}(k)} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Soient $\mathcal{A} := \rho_k(\mathbb{C}GL(V))$, $\mathcal{B} := \sigma_k(\mathbb{C}\mathfrak{S}_k)$.

Définition

$$\begin{aligned} \rho_k : GL(V) &\longrightarrow \text{End}(V^{\otimes k}) \\ g &\longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} V^{\otimes k} & \longrightarrow & V^{\otimes k} \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_k & \longmapsto & gv_1 \otimes \dots \otimes gv_k \end{array} \right. \\ \\ \sigma_k : \mathfrak{S}_k &\longrightarrow \text{End}(V^{\otimes k}) \\ s &\longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} V^{\otimes k} & \longrightarrow & V^{\otimes k} \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_k & \longmapsto & v_{s^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{s^{-1}(k)} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Soient $\mathcal{A} := \rho_k(\mathbb{C}GL(V))$, $\mathcal{B} := \sigma_k(\mathbb{C}\mathfrak{S}_k)$.

Théorème (Schur)

$\mathcal{A} = \text{Comm}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{B} = \text{Comm}(\mathcal{A})$.

Définition

$$\begin{aligned} \rho_k : GL(V) &\longrightarrow \text{End}(V^{\otimes k}) \\ g &\longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} V^{\otimes k} & \longrightarrow & V^{\otimes k} \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_k & \longmapsto & gv_1 \otimes \dots \otimes gv_k \end{array} \right. \\ \\ \sigma_k : \mathfrak{S}_k &\longrightarrow \text{End}(V^{\otimes k}) \\ s &\longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} V^{\otimes k} & \longrightarrow & V^{\otimes k} \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_k & \longmapsto & v_{s^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{s^{-1}(k)} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Soient $\mathcal{A} := \rho_k(\mathbb{C}GL(V))$, $\mathcal{B} := \sigma_k(\mathbb{C}\mathfrak{S}_k)$.

Théorème (Schur)

$\mathcal{A} = \text{Comm}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{B} = \text{Comm}(\mathcal{A})$.

Théorème (Dualité de Schur-Weyl)

On a une décomposition en $\mathfrak{S}_k \times GL(V)$ -représentations irréductibles de $\bigotimes^k V$ comme suit :

$$\bigotimes^k V = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathcal{P}_k \\ \ell(\lambda) \leq \dim(V)}} V_\lambda \otimes \mathbb{S}_\lambda(V).$$

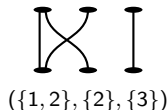
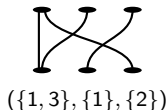
- 1 Contexte historique
 - Quelques dates et pionniers de la théorie
- 2 Introduction
 - Résultats classiques
 - Représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$
- 3 La dualité de Schur-Weyl
 - Théorème du double commutant
 - La dualité de Schur-Weyl
- 4 Extension de la dualité
 - Algèbre des permutations fusionnées
 - Extension de la dualité
- 5 Conclusion

Exemples :

- $n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{k} = (1, 1, \dots, 1)$. Permutation fusionnée $\longleftrightarrow$ Permutation.

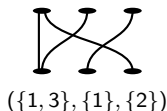
Exemples :

- $n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{k} = (1, 1, \dots, 1)$. Permutation fusionnée $\leftrightarrow$ Permutation.
- $n = 3$, $\underline{k} = (2, 1, 1)$. 6 possibilités :



Exemples :

- $n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{k} = (1, 1, \dots, 1)$. Permutation fusionnée $\leftrightarrow$ Permutation.
- $n = 3$, $\underline{k} = (2, 1, 1)$. 6 possibilités :



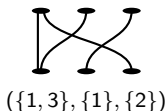
Définition

L'algèbre des permutations fusionnées $(H_{\underline{k}, n}(1), +, \cdot)$:

- Espace vectoriel : Base indexée par les permutations fusionnées.
- Multiplication : Cf. Exemple.

Exemples :

- $n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{k} = (1, 1, \dots, 1)$. Permutation fusionnée $\leftrightarrow$ Permutation.
- $n = 3$, $\underline{k} = (2, 1, 1)$. 6 possibilités :



Définition

L'algèbre des permutations fusionnées $(H_{\underline{k}, n}(1), +, \cdot)$:

- Espace vectoriel : Base indexée par les permutations fusionnées.
- Multiplication : Cf. Exemple.

Exemple : $n = 2$, $\underline{k} = (2, 2)$:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \cdot \text{Diagram 2} \\ \swarrow \quad \searrow \\ (\{1, 2\}, \{1, 2\}) \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \vdots \\ \text{Diagram 7} \end{array} = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 8} \\ \vdots \\ \text{Diagram 11} \end{array} \right) \\
 & = \frac{1}{4} \begin{array}{c} \text{Diagram 12} \\ \vdots \\ \text{Diagram 14} \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{Diagram 15} \\ \vdots \\ \text{Diagram 16} \end{array} + \frac{1}{4} \begin{array}{c} \text{Diagram 17} \\ \vdots \\ \text{Diagram 18} \end{array}
 \end{aligned}$$

- 1 Contexte historique
 - Quelques dates et pionniers de la théorie
- 2 Introduction
 - Résultats classiques
 - Représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$
- 3 La dualité de Schur-Weyl
 - Théorème du double commutant
 - La dualité de Schur-Weyl
- 4 Extension de la dualité
 - Algèbre des permutations fusionnées
 - Extension de la dualité
- 5 Conclusion

Extension de la dualité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} := (k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. Posons $N := \sum_{i=1}^n k_i$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} := (k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. Posons $N := \sum_{i=1}^n k_i$.

Définition

$$P_{k_i} := \frac{1}{k_i!} \sum_{\omega \in \mathfrak{S}_{k_i}} \delta_{\omega} \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_{k_i}$$

$$P_{\underline{k}, n} := \bigotimes_{i=1}^n P_{k_i} \in \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}\mathfrak{S}_{k_i}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} := (k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. Posons $N := \sum_{i=1}^n k_i$.

Définition

$$P_{k_i} := \frac{1}{k_i!} \sum_{\omega \in \mathfrak{S}_{k_i}} \delta_{\omega} \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_{k_i}$$

$$P_{\underline{k},n} := \bigotimes_{i=1}^n P_{k_i} \in \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}\mathfrak{S}_{k_i}.$$

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, on définit l'algèbre :

$$\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1) := P_{\underline{k},n} \cdot \mathbb{C}\mathfrak{S}_N \cdot P_{\underline{k},n}.$$

Extension de la dualité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} := (k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. Posons $N := \sum_{i=1}^n k_i$.

Définition

$$P_{k_i} := \frac{1}{k_i!} \sum_{\omega \in \mathfrak{S}_{k_i}} \delta_{\omega} \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_{k_i}$$

$$P_{\underline{k},n} := \bigotimes_{i=1}^n P_{k_i} \in \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}\mathfrak{S}_{k_i}.$$

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, on définit l'algèbre :

$$\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1) := P_{\underline{k},n} \cdot \mathbb{C}\mathfrak{S}_N \cdot P_{\underline{k},n}.$$

Théorème

Les algèbres $\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1)$ et $H_{\underline{k},n}(1)$ sont isomorphes.

Extension de la dualité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} := (k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. Posons $N := \sum_{i=1}^n k_i$.

Définition

$$P_{k_i} := \frac{1}{k_i!} \sum_{\omega \in \mathfrak{S}_{k_i}} \delta_\omega \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_{k_i}$$

$$P_{\underline{k},n} := \bigotimes_{i=1}^n P_{k_i} \in \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}\mathfrak{S}_{k_i}.$$

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, on définit l'algèbre :

$$\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1) := P_{\underline{k},n} \cdot \mathbb{C}\mathfrak{S}_N \cdot P_{\underline{k},n}.$$

Théorème

Les algèbres $\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1)$ et $H_{\underline{k},n}(1)$ sont isomorphes.

Proposition

$(\mathcal{A}, +, \cdot)$ algèbre (unitaire et associative), $x \in \mathcal{A}$ idempotent de $\mathcal{A}$

$(V_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ système complet de $\mathcal{A} \rightsquigarrow (\rho_i(x)(V_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ système complet de $x \cdot \mathcal{A} \cdot x$.

Ici, $x := P_{\underline{k},n}$ (idempotent de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_N$). On a : $P_{\underline{k},n} \left(\bigotimes_{i=1}^N V \right) = \bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V)$.

Ici, $x := P_{\underline{k},n}$ (idempotent de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_N$). On a : $P_{\underline{k},n} \left(\bigotimes_{i=1}^N V \right) = \bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V)$.

Remarque importante : Pour $i \in \{1, \dots, n\} \rightsquigarrow \text{Sym}^{k_i}(V)$ est un $GL(V)$ -module
 $\rightsquigarrow \bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V)$ est un $GL(V)^n$ -module.

$$\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1) \xrightarrow{\sigma_{\underline{k},n}} \text{End} \left(\bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V) \right) \xleftarrow{\rho_{\underline{k},n}} \mathbb{C}GL(V)$$

Posons $\mathcal{A} := \sigma_{\underline{k},n}(\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1))$ et $\mathcal{B} := \rho_{\underline{k},n}(\mathbb{C}GL(V))$

Ici, $x := P_{\underline{k},n}$ (idempotent de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_N$). On a : $P_{\underline{k},n} \left(\bigotimes_{i=1}^N V \right) = \bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V)$.

Remarque importante : Pour $i \in \{1, \dots, n\} \rightsquigarrow \text{Sym}^{k_i}(V)$ est un $GL(V)$ -module
 $\rightsquigarrow \bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V)$ est un $GL(V)^n$ -module.

$$\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1) \xrightarrow{\sigma_{\underline{k},n}} \text{End} \left(\bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V) \right) \xleftarrow{\rho_{\underline{k},n}} \mathbb{C}GL(V)$$

Posons $\mathcal{A} := \sigma_{\underline{k},n}(\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1))$ et $\mathcal{B} := \rho_{\underline{k},n}(\mathbb{C}GL(V))$

Théorème

$\text{Comm}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ et $\text{Comm}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$.

Ici, $x := P_{\underline{k},n}$ (idempotent de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_N$). On a : $P_{\underline{k},n} \left(\bigotimes_{i=1}^N V \right) = \bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V)$.

Remarque importante : Pour $i \in \{1, \dots, n\} \rightsquigarrow \text{Sym}^{k_i}(V)$ est un $GL(V)$ -module
 $\rightsquigarrow \bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V)$ est un $GL(V)^n$ -module.

$$\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1) \xrightarrow{\sigma_{\underline{k},n}} \text{End} \left(\bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V) \right) \xleftarrow{\rho_{\underline{k},n}} \mathbb{C}GL(V)$$

Posons $\mathcal{A} := \sigma_{\underline{k},n}(\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1))$ et $\mathcal{B} := \rho_{\underline{k},n}(\mathbb{C}GL(V))$

Théorème

$\text{Comm}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ et $\text{Comm}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$.

Théorème

Les représentations irréductibles de $\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1)$ sont indexées par les partitions λ de N telles que $\lambda \geq \underline{k}^{\text{ord}}$.

Extension de la dualité

Ici, $x := P_{\underline{k},n}$ (idempotent de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_N$). On a : $P_{\underline{k},n} \left(\bigotimes_{i=1}^N V \right) = \bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V)$.

Remarque importante : Pour $i \in \{1, \dots, n\} \rightsquigarrow \text{Sym}^{k_i}(V)$ est un $GL(V)$ -module
 $\rightsquigarrow \bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V)$ est un $GL(V)^n$ -module.

$$\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1) \xrightarrow{\sigma_{\underline{k},n}} \text{End} \left(\bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V) \right) \xleftarrow{\rho_{\underline{k},n}} \mathbb{C}GL(V)$$

Posons $\mathcal{A} := \sigma_{\underline{k},n}(\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1))$ et $\mathcal{B} := \rho_{\underline{k},n}(\mathbb{C}GL(V))$

Théorème

$\text{Comm}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ et $\text{Comm}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$.

Théorème

Les représentations irréductibles de $\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1)$ sont indexées par les partitions λ de N telles que $\lambda \geq \underline{k}^{\text{ord}}$.

Théorème (Extension de la dualité de Schur-Weyl)

$$\bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V) \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \in U_{\underline{k},n} \\ \ell(\lambda) \leq \dim(V)}} \underbrace{\mathbb{S}_{\lambda}(V) \otimes W_{\lambda}}_{\mathbb{C}GL(V) \otimes H_{\underline{k},n}(1)\text{-module}}$$

- Représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n \rightsquigarrow$ représentations irréductibles de $GL(V)$.
- Dualité classique.
- Première généralisation.

- Représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n \rightsquigarrow$ représentations irréductibles de $GL(V)$.
- Dualité classique.
- Première généralisation.
- Approfondissement de la dualité.
- Algèbres de Hecke fusionnées.
- Applications.

Merci pour votre attention !