

201 : Espaces de fonctions.

Exemples et applications.

I) Espace des fonctions continues

A) Espace de fonctions continues sur $\mathbb{R}$

Définition, image d'un compact par une application continue. Espace $(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un BANACH.

B) Espace $\mathcal{C}(K)$

Définition, propriétés. Théorème de HEINE. DEV 1 : STONE-WEIERSTRASS. Applications. Cas des fonctions à valeurs complexes. Applications. Théorème d'ASCOLI et applications.

II) Espace $\mathcal{L}(E, F)$

A) Application linéaire continue

Caractérisation d'une application linéaire continue. Application, l'algèbre normée $(\mathcal{L}_c(E), +, \cdot, \circ)$.

B) La complétude dans $\mathcal{L}(E, F)$

$(F \text{ complet}) \Rightarrow (\mathcal{L}(E, F) \text{ complet})$. Application à l'ouvert $GL_c(E)$ lorsque E est un BANACH. Théorème de BAIRE. Application au théorème de BANACH-STEINHAUS. Application : Série de FOURIER des applications continues. Théorème de l'application ouverte, du graphe fermé.

III) Espace L^p

A) Résultats généraux

Définitions, inégalités de YOUNG, de HÖLDER et de MIN-KOWSKI. Théorème de RIESZ-FISHER.

B) Applications

Cas de la mesure finie. DEV 2 : LEMME DE GROTHENDIECK. Résultat "vitrine" de l'analyse. Inégalité de HARDY

IV) Espace de HILBERT

Définition, exemple fondamental de ℓ^2 . Théorèmes de projection et de représentation de RIESZ. Applications.

ANNEXE : Contre-exemple de complétude de $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, projection sur un convexe fermé

Références :

- GOURDON
- HIRSH-LACOMBE
- ZULLY-QUEFFÉLEC
- GARET-KURTZMANN
- BECK-MALICK-PEYRÉ

203 : Utilisation de la notion de compacité

Cadre : (E, d) , (F, δ) deux espaces métriques.

I) Généralités

A) Caractérisation de la compacité

Définitions, exemple. Caractérisation de la compacité. Espace précompact. Caractérisation de la compacité pour un espace complet.

B) Propriétés

Compact $\Rightarrow$ Borné-Fermé. Suite décroissante de fermés d'un compact. Comportement via l'union/intersection. Produit d'espaces compacts. Image d'un compact par une application continue, homéomorphisme, théorème de HEINE.

II) Cas de la dimension finie

Les compacts d'un e.v.n. de dimension finie. Théorème de RIESZ, théorème de ROLLE, théorème de DINI.

III) Théorème de point fixe

Différents théorèmes d'une application selon les hypothèses portées à cette dernière, exemples. Théorème de BROUWER.

IV) Application aux familles normales

Ensemble $\mathcal{C}(E, F)$. Partie équicontinue, partie relativement compacte. DEV 1 : ASCOLI VECTORIEL. Exemple. Partie localement bornée. Suite exhaustive de compacts d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Théorème des familles normales.

V) Application à la densité

Définitions d'une sous-algèbre de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$, d'une partie sépa-

rante. DEV 2 : THÉORÈME DE STONE-WEIERSTRASS. Applications.

Références :

- GOURDON
- ZULLY-QUEFFÉLEC
- HIRSH-LACOMBE

204 : Connexité. Exemples et applications

Cadre : (E, d) un espace métrique, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Généralités

- A) Caractérisation de la connexité
Définitions de la connexité. Exemples. Espace connexe par arcs. Connexe par arcs $\Rightarrow$ Connexe.
- B) Propriétés
Image d'un connexe par une application continue, connexité de l'adhérence. Comportement via l'union et l'intersection

II) Composante connexe

- A) Définition
Définition, relation d'équivalence. Caractère ouvert/fermé des composantes connexes. Exemples.
- B) Ensembles matriciels
Définitions de $GL_n(\mathbb{K})$ et de $SL_n(\mathbb{K})$. Composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$. **DEV 1 :** ÉTUDE DE $GL_n(\mathbb{C})$. Application exponentielle matricielle sur $\mathbb{C}$ puis $\mathbb{R}$. Définitions des différents ensembles matriciels et leurs propriétés topologiques. **DEV 2 :** $SO_n(\mathbb{R})$ CONNEXE PAR ARCS + $SO_3(\mathbb{R})$ SIMPLE.

III) Analyse réelle

- A) Fonction à valeurs réelles
Parties connexes de $\mathbb{R}$. Image d'un intervalle par une fonction continue. (T.V.I.) Application. Théorème de DARBOUX. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ non homéomorphes.

- B) Différentielle
Définition d'une différentielle. Différentielle composée. Application. Inégalité des accroissements finis. Applications.

IV) Analyse complexe

- A) Prolongement analytique
Fonction développable en série entière. Exemple. Théorèmes des zéros isolés et du prolongement analytique. Exemple et contre-exemple. Application à la fonction d'EULER.
- B) Principe du maximum
Principe du maximum, passage du local au global. Application.

Références :

- GOURDON
- ROMBALDI
- CALDERO
- BECK-MALICK-PEYRÉ

205 : Espaces complets. Exemples et applications.

Cadre : (E, d) un espace métrique.

I) Généralités

A) Définitions, exemples

Suite de CAUCHY, espace complet, exemple et contre-exemple.

B) Propriétés des espaces complets

Complet $\Rightarrow$ Fermé, produit d'espaces métriques, fermés emboîtés, application. Prolongement d'une application uniformément continue sur un espace complet, complété d'un espace métrique.

II) Théorèmes de point fixe

Théorème du point fixe, contres-exemples, corollaire avec les itérées.

Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, exemples Théorème du point fixe à paramètre.

III) Exemples d'espace complets

A) Espaces de Lebesgue

Définition de $\mathcal{L}^p$, inégalités de HÖLDER et MINKOWSKI, passage au quotient L^p .

DEV 1 : RIESZ-FISCHER.

DEV 2 : HARDY.

Cas des mesures finis : lemme de GROTHENDIECK

B) Espace de HILBERT

Définition, exemple de L^2 . Projection sur un convexe fermé.

Cas d'un sous-espace vectoriel fermé. Linéarité de la projection. Théorème de représentation de RIESZ-FRÉCHET.

IV) Espaces de baire

A) Théorème de BAIRE

Définition, théorème de BAIRE. Équivalence.

B) Applications

Espaces de BANACH $\Rightarrow$ Dimension finie ou infinie non dénombrable. BANACH-STEINHAUS, application. Application ouverte, BANACH.

ANNEXE : Projection sur un convexe fermé.

Références :

- GOURDON
- BERTHELIN
- GARET-KURTZMANN
- BERNIS
- BECK-MALICK-PEYRÉ

206 : Exemples d'utilisation de la dimension finie en analyse.

Cadre : (E, d) un espace métrique.

I) Espaces vectoriels normés

A) Généralités

Définition, exemple. (Dimension finie $\Rightarrow$ normes équivalentes, linéaire $\Rightarrow$ continue, complétude, sous-espace vectoriel fermé, compact = fermés bornés.) Théorème de RIESZ

B) Espaces de HILBERT

Définition, exemple de L^2 . Théorème de projection sur un convexe fermé, car d'un sous-espace vectoriel de E euclidien. Propriétés de la projection. Orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT.

II) Espaces L^p

A) Propriétés classiques

Inégalité de HÖLDER, norme sur L^p , cas $p = \infty$, théorème de RIESZ-FISCHER.

B) Théorème de GROTHENDIECK

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ espace mesuré de mesure finie. Injection canonique linéaire continue. Théorème du graphe fermé. DEV 1 : Théorème de GROTHENDIECK. Contre-exemples sans les hypothèses.

III) Calcul différentiel

Définition d'une application différentiable. Indépendance des normes dans le cas de la dimension finie. Dérivée partielle, matrice jacobienne, exemple. Théorème d'inversion locale, appli-

cation. Théorème des fonctions implicites, exemples. Utilisation de la dimension finie pour l'existence d'un minimum local strict.

IV) Équations différentielles linéaires

Définition, exemple, théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire. Structure de l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire. DEV 2 : FAMILLES LIBRES D'APPLICATIONS.

ANNEXE : Projection sur un convexe fermé, inversion local et fonctions implicites.

Références :

- GOURDON
- BECK-MALICK-PEYRÉ
- GARET-KURTZMANN
- ZULLY-QUEFFÉLEC
- ROUVIÈRE
- BERTHELIN

208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E, F des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.

I) Généralités

- A) Définition, propriétés
Définition, normes équivalentes, cas de la dimension finie, exemples.
- B) Application linéaire
Caractérisation de la continuité des applications linéaires de E dans F . L'e.v.n $\mathcal{L}_c(E, F)$. Théorème de RIESZ. Caractérisation de la continuité d'une forme linéaire.

II) Espaces de BANACH

Définition, exemple. $(F \text{ BANACH}) \Rightarrow (\mathcal{L}_c(E, F) \text{ BANACH})$.
Le sous-ensemble $\mathcal{GL}_c(E)$. Théorème de BAIRE. Applications.
Théorème de BANACH-STEINHAUS, de l'application ouverte.
Applications aux séries de FOURIER.

III) Espaces L^p

- A) Résultats généraux
Définition de $\mathcal{L}^p$, inégalités de HÖLDER, de MINKOWSKI, l'espace vectoriel normé $(L^p, ||.||_p)$, exemples.
- B) Applications
Cas des mesures finies. Théorème de RIESZ-FISHER. DEV 1 : INÉGALITÉ DE HARDY. DEV 2 : LEMME DE GROTHENDIECK. Résultat "vitrine" de l'analyse.

IV) Espaces de HILBERT

Définition, exemple de L^2, ℓ^2 , projection sur un convexe fermé, cas d'un sous-espace fermé. Critère de densité d'un sev dans un HILBERT. Existence d'un adjoint. Théorème de STAMPACCHIA, application au problème de DIRICHLET.

Références :

- GOURDON
- GARET-KURTZMANN
- BECK-MALICK-PEYRÉ
- BREZIS

209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

I) Approximation par des polynômes

A) Approximation locale

Formules de TAYLOR-YOUNG, de TAYLOR-LAGRANGE, de TAYLOR avec reste intégrale.. Exemples et applications.

B) Approximation dans l'espace des fonctions continues

Définition de $\mathcal{C}(K)$, (K, d) compact. Théorème de DINI. **DEV 1** : STONE-WEIERSTRASS. Applications, cas des fonctions à valeurs complexes. Théorèmes adaptés aux fonctions à valeurs complexes. Applications.

C) Approximation dans L^2

Fonction poids ρ , espace $L^2(I, \rho)$. Existence d'une suite de polynômes orthogonaux. Exemples. Théorème d'existence d'une base hilbertienne. Application à $L^2(\mathbb{R})$.

II) Approximation trigonométrique

A) Fonctions 2π -périodiques, convolution

Coefficients de FOURIER. Espace $L^p_{2\pi}$, produit de convolution, propriétés des coefficients de FOURIER. Définition de la série d'ordre N de FOURIER.

B) Exemples de noyaux trigonométriques

Noyau de DIRICHLET, propriétés. Noyau de FEJÉR, propriétés.

C) Application

Continuité de la translation dans L^p .. **DEV 2** : FEJÉR. Applications.

III) Régularisation sur $\mathbb{R}^d$, distributions

Théorème de YOUNG, l'algèbre L^1 , approximation de l'unité. Convergence de la convolée dans L^p . Applications à la transformée de FOURIER, densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Définition d'une distribution sur un ouvert, dérivation, convergence au sens des distributions, exemples.

ANNEXE : Sinus et ses DL, polynômes de LEGENDRE et HERMITE, noyaux de FEJER, fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

- GOURDON
- HIRSH-LACOMBE
- BECK-MALICK-PEYRÉ
- ZULLY-QUEFFÉLEC

213 : Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Généralités

Définition, exemple de ℓ^2 . Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. Application. Caractérisation des espaces préhilbertiens. Théorème de GRAM-SCHMIDT, exemple.

II) Conséquences de la projection

DEV 1 : PROJECTION + RIESZ-FRÉCHET. L'application projection. Cas de la projection sur un sous-espace fermé. Cas de la dimension finie. Critère de densité. Applications.

III) Bases hilbertiennes

A) Définition, propriété

Définition, existence dans un espace de HILBERT séparable. Exemples. Caractérisation des bases hilbertiennes.

B) Exemples

Espace $L^2(\mathbb{T})$, coefficients de FOURIER. Base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. Applications. Fonctions poids et espace $L^2(I, \rho)$, exemples de polynômes orthogonaux. Théorème d'existence d'une base hilbertienne dans $L^2(I, \rho)$. Exemples.

IV) Vers les espaces de SOBOLEV

A) Théorèmes principaux

DEV 2 : THÉORÈME DE STAMPACCHIA. Lax-Milgram.

B) Espace de SOBOLEV

Définition de $W^{1,p}$, exemple. $(H^1, ||.||_1)$ est un espace de HILBERT. Définition de $H_0^1(I)$. Cas de $R = I$.

C) Problème aux limites

Problème de DIRICHLET. Définition d'une solution faible. Théorème d'existence d'une solution faibles. Application.

ANNEXES : Projections sur un convexe et sur un sous-espace fermé. HAHN-BANACH géométrique, procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT.

Références :

- BECK-MALICK-PEYRÉ
- BREZIS

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

I) Différentielle, dérivée partielle

A) Définitions, propriétés

Définition d'une application différentiable, exemples. Propriétés. Composition des différentielles. Lien avec les dérivées partielles. Définition de $\mathcal{C}^1$. Différentielle d'ordre supérieur. Théorème de SCHWARZ. Matrice jacobienne.

B) Formules de TAYLOR

Notation, formule de TAYLOR.

II) Le théorème d'inversion locale

DEV 1 : THÉORÈME D'INVERSION LOCALE. Exemple. Théorème d'inversion globale. Applications. Contre-exemple. **DEV 2** : LEMME DE MORSE. Application.

III) Le théorème des fonctions implicites

T.F.I., exemple. Application au folium de DESCARTES.

IV) Sous-variétés

Définitions d'un sous-ensemble lisse, d'une sous-variété, d'un vecteur tangent, d'une immersion, d'une submersion, exemples et contre-exemples. Caractérisation des sous-variétés. Applications.

ANNEXES : Inversion locale, fonctions implicites, lemme de morse, sous-variétés.

Références :

- GOURDON
- ROUVIÈRE
- LAFONTAINE

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

I) Généralités

A) Définitions

Définition de la différentielle d'une application. Propriétés et exemples. Vecteur gradient, pour les fonctions à valeurs réelles.

B) Propriétés

Stabilité par somme et produit par un scalaire. Composition des différentielles. Application. Dérivation selon un vecteur. Dérivée partielle. Exemples. Différentielle selon les dérivées partielles.

II) Théorèmes fondamentaux

A) Accroissements finis

T.A.C.. Exemple et contre-exemple. Inégalité des accroissements finis.

B) Inversion locale

Définition d'un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme. **DEV 1 : THÉORÈME D'INVERSION LOCALE.** Application. Extension à l'inversion globale. Exemple et contre-exemple.

C) Fonctions implicites

T.F.I.. Exemples et applications.

III) Différentielle seconde

Différentielle seconde, dérivée partielle d'ordre supérieur. Théorème de SCHWARZ. Extremum relatif, lien avec la différentielle

en un point. Condition suffisante pour l'existence d'un extremum. Matrice hessienne, cas $n = 2$ Exemples. Théorèmes des extrema liés. Applications. **DEV 2 : LEMME DE MORSE.** Application.

ANNEXES : Inversion locale, fonctions implicites, lemme de morse.

Références :

- GOURDON
- ROUVIÈRE

219 : Extrema : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Cadre : E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé de norme $||.||$.

I) Généralités

A) Définitions

Définition d'un minimum local (resp. maximum local et global (resp. maximum global). Exemples et contre-exemples.

B) Existence d'extrema

Existence pour une application continue sur un compact. Application. Existence d'un point fixe sur un compact. Fonction convexe sur un intervalle est continue sur son intérieur. Exemples. Point minimisant d'un convexe. Cas du strictement convexe.

II) Fonction d'une variable complexe

Formule de CAUCHY, fonctions harmoniques. Principe du maximum local puis global. Applications.

III) Espace de hilbert

DEV 1 : PROJECTION + RIESZ-FRÉCHET. Application. Théorème de STAMPACCHIA, application au problème de DIRICHLET.

IV) Calcul différentiel

A) Premier ordre

Définition d'un point critique, exemples. Théorème de ROLLE, application aux accroissements finis. Contre-exemple sur $\mathbb{C}$.

B) Second ordre

Condition suffisante pour l'existence d'un extremum local. Cas $n = 2$

V) Optimisation

A) Méthode de NEWTON

Méthode de NEWTON, application, approximation des zéros d'un polynôme.

B) Méthode de descente

DEV 2 : GRADIENT À PAS OPTIMAL

C) Moindre carrés

Définition du problème. Théorème d'existence et exemples.

ANNEXES : Inversion locale, fonctions implicites, lemme de morse.

Références :

- GOURDON
- BECK-MALICK-PEYRÉ
- BREZIS
- ROUVIÈRE
- ALLAIRE-KABER

220 : Équations différentielles ordinaires.

Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Généralités

Définition d'une équation différentielle d'ordre n dans $\mathbb{K}^N$. Définition d'une solution. Exemples et contre-exemples. Problème de CAUCHY. Régularité des solutions. Formulation intégrale. Prolongement d'une solution, définitions d'une solution globale et maximale, exemples. Ramener à l'ordre 1.

II) Étude des solutions

A) Existence de solutions

Lemme de GRONWALL, fonction localement lipschitzienne, exemple des fonctions $\mathcal{C}^1$. **DEV 1** : THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ. Théorème des bouts, applications.

B) Raccordement de solutions

Proposition sur les raccordements de solutions.

III) Résolution dans certains cas particuliers

A) Équation linéaire indépendante du temps, homogène

Résolution du problème de la forme $y' = Ay$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, exemple.

B) Équation à variables séparables

Définitions, résolution de $y' = g(y)h(t)$. Exemple.

C) Équation homogène

Définition, résolution et exemple.

IV) Stabilité des solutions

Stabilité à droite (resp. à gauche), attractivité à droite (resp. à gauche), solution asymptotique à droite (resp. à gauche), exemple. **DEV 2** : LEMME DE MORSE. Applications.

Référence :

- BERTHELIN

221 : Équations différentielles linéaires.
Systèmes d'équations différentielles.
Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Généralités

A) Définitions

Définition d'une équation différentielle d'ordre n dans $\mathbb{K}^N$, définition d'une solution. Exemple. Problème de CAUCHY. Équation différentielle linéaire, homogène. Formulation intégrale, exemple.

B) Ramener à l'ordre 1

Se ramener à l'ordre 1, exemple.

II) Structure des solutions

A) Solution globale, solution maximale

Définition, exemple et contre-exemple.

B) Le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire

Lemme de GRONWALL, point fixe d'un espace métrique complet. **DEV 1** : THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ LINÉAIRE. Application.

C) Structure de l'ensemble des solutions

Ensemble des solutions maximales et globales, l'espace vectoriel des solutions (globales) de $y' = A(t)y$, espace affine des solutions (maximales) de $y' = A(t)y + B(t)$. Exemples.

DEV 2 : FAMILLE LIBRE D'APPLICATIONS.

III) Matrices fondamentales et wronskien

Définition d'un système fondamental, de sa matrice et du wronskien associé. Exemple. Caractérisation de la matrice fondamentale. Exemples.

IV) Exponentielle matricielle

Définition, exemple. Lien avec la matrice fondamentale. Exemple. Cas où A est diagonalisable. Différentiabilité de l'exponentielle matricielle.

V) Variation de la constante

Formule de DUHAMEL, cas constant. Exemple.

VI) Stabilité des solutions

Stabilité à droite (resp. à gauche), attractivité à droite (resp. à gauche), solution asymptotique à droite (resp. à gauche), exemple. Caractérisation d'une solution stable dans le cas linéaire.

ANNEXES : Illustrations des trajectoires des solutions du système linéaire d'équations différentielles.

Référence :

- BERTHELIN

223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I) Généralités

A) Définitions, propriétés

Définition de suite, de convergence, exemples. Suite bornée, de CAUCHY, complétude de $\mathbb{K}$. Suite extraite, théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, exemples.

B) Théorèmes classiques, suites récurrentes

Théorème des gendarmes, suites adjacentes, exemples. Théorème de CESARO. Suite définie par récurrence, exemples classiques de suites (arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique, homographique).

II) Valeurs d'adhérence, limites inférieure et supérieure

Définition d'une valeur d'adhérence, exemple. Caractérisation des valeurs d'adhérence. Ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est fermé. Définitions de limsup et liminf pour une suite bornée, exemples. limsup et liminf vu comme valeur d'adhérence. Caractérisation des suites convergentes.

III) Application aux sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Caractérisation des sous-groupes additifs de $(\mathbb{R}, +)$. Valeurs d'adhérences de $u_n = \sin(n)$.

IV) Application à la résolution de systèmes linéaires.

DEV 1 : MÉTHODE DE GRADIENT À PAS OPTIMAL. Gradient conjugué.

V) Application aux fonctions continue et uniformément continue

A) Définitions, propriétés

Définitions d'une application continue, uniformément continue, exemple. Caractérisation par les suites. Applications à des fonctions continues non uniformément continues.

B) Théorème du point fixe

Théorèmes du point fixe. Tombe en défaut sans les hypothèses, exemple.

C) Méthode de NEWTON

DEV 2 : MÉTHODE DE NEWTON.

ANNEXE : Méthode de gradient à pas optimal, méthode de NEWTON, sinus itéré.

Références :

- GOURDON
- GARET-KURTZMANN

224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I) Généralités

A) Relation de comparaison

Définitions de domination, négligeabilité et équivalence au voisinage d'un point, cas des suites, exemples. Propriétés de stabilité des différentes comparaisons, exemple et contre-exemple.

B) Développement limité

Définition, exemple. Propriétés d'unicité, de parité et d'imparité d'une fonction. Formule de TAYLOR-YOUNG, exemple. Dérivabilité et intégration des DL. Somme, produit, quotient de DL, exemples.

II) Développement asymptotique des suites

Comparaison des séries à termes positifs convergente / divergente. Application aux sommes de RIEMANN. Contre-exemple du cas non positif. **DEV 1** : DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SÉRIE HARMONIQUE. Formule de STIRLING, application à l'inégalité de CARLEMAN. Théorème de comparaison série-intégrale, application aux séries de BERTRAND.

III) Développement asymptotique des fonctions

Relation de comparaison des intégrales convergente / divergente, exemples. **DEV 2** : MÉTHODE DE NEWTON Application. Équivalent de la fonction zêta de RIEMANN.

ANNEXES : Comparaison série intégrale, méthode de NEWTON.

Références :

- [GOURDON](#)

226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I) Généralités

A) Définitions, propriétés

Définition, exemple. Convergence. Définition d'une suite récurrence d'ordre h . Cas d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ stable par une application, $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemple de $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

B) Suites classiques

Suites arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique, homographique, linéaire homogène.

C) Suites récurrentes vectorielles

Ramener à l'ordre 1 de la forme $u_{n+1} = Au_n$. Exemple d'une chaîne de MARKOV.

D) Équation caractéristique

Définition, proposition, exemples.

II) Point fixe et suite récurrente

Théorème de PICARD. Existence de la contraction nécessaire.

Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS. Théorèmes du point fixe. Point fixe attractif, superattractif et répulsif, exemples. Itération du sinus. Itérée contractante.

III) Application à la résolution d'équations par des méthodes diverses

A) Méthode de NEWTON

DEV 2 : MÉTHODE DE NEWTON. Applications.

B) Méthode du gradient à pas optimal

Mise en place du problème. **DEV 2 :** MÉTHODE DU GRADIENT À PAS OPTIMAL.

C) Méthode de la puissance

Objectif puis théorème, cas d'une matrice strictement positive.

ANNEXE : Méthode de NEWTON, sinus itéré, points attractif, répulsif.

Références :

- GOURDON
- ROUVIÈRE
- SERRE

228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle.

Exemples et applications.

Cadre : I un intervalle réel d'extrémités $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$.

I) Généralités

A) Fonction continue

Définition de la continuité en un point. Exemple et contre-exemple. Caractère bornée d'une fonction au voisinage d'un point de continuité. Caractérisation séquentielle. Application. Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $C^0(I, \mathbb{R})$. Prolongement par continuité. Exemple.

B) Fonction dérivable

Définition de la dérivabilité en un point. Dérivable $\Rightarrow$ continue. Contre-exemple de la réciproque. Fonction dérivée. Exemple de $D = \emptyset$ où f est continue. Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $D(I, \mathbb{R})$. Formule de LEIBNIZ. Développement limité, exemples.

II) Résultats sur la continuité et dérivabilité

A) Théorème des valeurs intermédiaires

TVI, application à $\mathbb{R}[X]$, à $SO_n(\mathbb{R})$.

B) Théorème de HEINE

Définition de l'uniforme continuité, théorème de HEINE, application aux fonction périodique.

C) Théorème de ROLLE

Théorème, application à f' vérifiant le TVI. Théorème des accroissements finis.

D) Formules de TAYLOR

Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $C^n(I, \mathbb{R})$. Théorèmes de TAYLOR-LAGRANGE, TAYLOR avec reste intégral. Applications.

III) Stabilité par passage à la limite (suite de fonctions)

Convergences simple et uniforme, exemples. Limite uniforme d'une fonction continue est continue. Théorème de DINI. Interversions limites intégrale sur un I . Suites de fonctions C^1 . DEV 1 : STONE-WEIERSTRASS. Application.

IV) Séries de Fourier

Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $C_m^{2\pi}(\mathbb{R})$. Coefficients et séries de FOURIER. Théorème de DIRICHLET. Exemples. Théorème de BANACH-STEINHAUSS. DEV 2 : SÉRIES DE FOURIER DES APPLICATIONS CONTINUES.

Références :

- ROMBALDI
- GOURDON

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

I) Fonctions monotones

A) Généralités

Application croissante (resp. strictement décroissante) et décroissante (resp. strictement décroissante). Exemples. Fonction monotone. Comportement via le produit par un scalaire, via la composition et produit, réciproque d'une bijection.

B) Limite, continuité

Limite à gauche (resp. à droite) d'une fonction monotone. Exemple. T.V.I..

C) Dérivabilité

Fonction dérivable à droite (resp. à gauche). Liens avec la monotonie d'une fonction.

II) Fonctions convexes

Fonction convexe, exemple. Caractérisations. Propriétés d'une fonction convexe.

III) Applications

A) Inégalités de convexité

Inégalités de YOUNG, de HÖLDER et de MINKOWSKI. Espace ℓ^p normé. DEV 1 : INÉGALITÉ DE CARLEMAN.

B) Les fonctions eulériennes

Fonction GAMMA, propriétés. Fonction BÊTA, liens entre les fonctions.

C) En probabilités

Inégalité de Hoeffding.

IV) Convexité, optimisation

Partie convexe, caractérisation d'une fonction différentiable (à valeurs réelles) convexe. Exemple. Unicité d'un minimum d'une application strictement convexe sur un convexe. Méthode de NEWTON, application. DEV 2 : MÉTHODE DE GRADIENT À PAS OPTIMAL.

Références :

- RAMIS-DESCHAMPS-ODOUX
- GOURDON
- BECK-MALICK-PEYRÉ
- ROUVIÈRE

230 : Séries de nombres réels ou complexes.
Comportement des restes ou des sommes

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I) Généralités

A) Définitions, propriétés

Définition d'une série, convergence et divergence, exemples.
Reste d'ordre n . Divergence grossière. Caractérisation de la convergence des séries télescopiques, exemple.

B) Critère de CAUCHY, absolue convergence

Définition de la convergence absolue, critère de CAUCHY, application à la série harmonique. Convergence absolue $\Rightarrow$ Convergence. Contre-exemple pour la réciproque.

II) Séries à termes positifs

Définition, caractérisation de la convergence par la convergence des sommes partielles. Règle de comparaison, d'équivalence, de domination, contre-exemples dans le cas de séries à termes non positifs. Comparaison série-intégrale. Développement asymptotique de la série harmonique. **DEV 1** : INÉGALITÉ DE CARLEMAN.

III) Séries à termes quelconques

A) Règles d'absolue convergence

Règle de CAUCHY, règle de d'ALEMBERT, exemples.
DEV 2 : TAUBÉRIEN FORT.

B) Séries semi-convergentes

Définition, exemple, critère de LEIBNIZ, d'ABEL, applica-

tions à des calculs de restes.

Réarrangement de RIEMANN.

IV) Séries de fourier

Définitions, théorèmes de PARSEVAL et DIRICHLET, applications à des calculs de sommes.

Références :

- AMRANI
- FRANCINO-GIANELLA-NICOLAS, Tome 1
- 131

234 : Fonctions et espaces de fonctions
LEBESGUE-intégrables

Cadre : $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Construction de l'intégrale, propriétés

Fonction mesurable, exemples. intégrale d'une fonction mesurable positive, extension à une fonction quelconque. Fonction intégrable. Cas complexe. Toute fonction mesurable positive est limite simple d'une suite croissante de fonctions simples.

II) Les grands théorèmes

BEPPPO LEVI, FATOU, convergence dominée, application, exemples et contre-exemples.

III) Cas particuliers importants

- A) Mesure de DIRAC
- B) Mesure de comptage
- C) Somme de deux mesures
- D) Mesure à densité

IV) Lien avec l'intégrale de riemann

Cas où les intégrales coïncident. Lien entre fonction LEBESGUE-intégrable et convergence de l'intégrale impropre. Exemple. Critère de RIEMANN-intégrabilité.

V) Les espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p .

Espaces $\mathcal{L}^p$, exemples. Exposants conjugués, inégalité de HÖLDER. Application. Inégalité de MINKOWSKI. Espace L^p . Inclusion dans le cas d'une mesure finie. DEV 1 : THÉORÈME DE RIESZ-FISHER. Extraction d'une sous-suite convergeant p.p..

Densité des fonctions étagées et continues à support compact dans L^p . DEV 2 : INÉGALITÉ DE HARDY.

VI) Convolution dans L^p

Convolution de deux fonctions, propriétés. Approximation de l'unité. Convergence de la convolée. Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$.

Références :

- GARET-KURTZMANN
- BECK-MALICK-PEYRÉ

235 : Problème d'interversion en analyse

Cadre : $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, $X \subset E$.

I) Interversions de limites

- A) Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions
Convergences simple et uniforme, exemples et contre-exemples. Critère de CAUCHY uniforme dans un BANACH.
- B) Continuité, dérivabilité
Limite uniforme d'une suite de fonctions continues (resp. bornées) est continue (resp. bornée). Exemple. Théorèmes de dérivabilité d'une limite de suite de fonctions.
- C) Double limite
Théorème de la double limite. Exemple et contre-exemple.

II) Interversion limite/intégrale

- A) Intégrale de RIEMANN
Théorème d'interversion sur un segment, exemple. Convergence dominée, exemples.
- B) Intégrale de LEBESGUE
Comparaison RIEMANN / LEBESGUE, théorème de BEPPO-LEVI, de convergence dominée. Contre-exemples sur les hypothèses, applications. Dérivabilité d'une intégrale à paramètres, exemple (Gamma).
DEV 1 : INTÉGRALE DE DIRICHLET.

III) Interversion intégrale / intégrale

Théorèmes de FUBINI-TONELLI. Exemples et applications à l'interversion somme/intégrale.

IV) Application à la transformée de fourier

Définition, propriétés de la transformée de FOURIER. Exemples. Formule de dualité, noyau de GAUSS, Approximation de l'unité.
DEV 2 : INJECTIVITÉ DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER.
Applications.

Références :

- AMRANI
- GARET-KURTZMANN
- AMRANI

236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

I) Techniques de calcul direct

- A) Calcul de primitives
Théorème fondamental de l'analyse, exemples.
- B) Intégration par parties
Théorème de l'intégration par parties, application à la semi-convergence de l'intégrale de DIRICHLET. Exemples de l'intégrale de WALLIS et la fonction Gamma.
- C) Changement de variables
Théorème en dimension 1, applications à une fonction paire. Règle de BIOCHE, exemple. Théorème en dimension quelconque.
- D) Théorèmes de FUBINI-TONELLI
Théorème de TONELLI. Application. Théorème de FUBINI. Calcul du volume de la boule unité.

II) Techniques de calcul indirect

- A) Suites de fonctions
Théorème de BEPPO-LEVI et de convergence dominée, remarques sur les hypothèses, exemples et contre-exemples. Application à la fonction Gamma. Théorème de dérivation sous le signe intégrale. Application à la fonction Gamma. DEV 1 : INTÉGRALE DE DIRICHLET.

- B) Analyse complexe
Théorème des résidus. Applications à une fraction de polynôme, à l'intégrale de DIRICHLET. Formule des compléments.

III) Transformée de Fourier

Définition, exemple, propriété de la transformée de FOURIER, exemples. Théorème de la dualité, définition du noyau de GAUSS, converge de la convolée. DEV 2 : INJECTIVITÉ DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER. Application, formule d'inversion.

IV) Technique d'approximation numérique

Méthode de quadrature, erreur de la méthode. Interpolation de LAGRANGE. Méthodes des rectangles, des points milieux, des trapèzes, de SIMPSON. Application à l'approximation de $\int_0^\pi \cos^2(x)dx = \frac{\pi}{4}$.

ANNEXE : Différentes méthodes d'approximation.

Références :

- GOURDON
- GARET-KURTZMANN
- AMRANI
- DEMAILLY

239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

I) Généralités

A) Régularité

Continuité et dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, exemple. **DEV 1** : INTÉGRALE DE DIRICHLET. Holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre, application à Γ .

B) Équivalent d'intégrale

Théorème des différents équivalents, applications.

II) L'algèbre de BANACH $L^1(\mathbb{R}^d)$.

A) Définitions, propriétés

Translaté de f , produit de convolution, propriétés, théorème justifiant la définition d'algèbre de BANACH.

B) Approximation de l'unité

Définition, exemples. Théorèmes de convergence. Densité dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

III) Transformation de FOURIER et applications

A) Transformation de FOURIER dans L^1

Définitions lemme de RIEMANN-LEBESGUE, propriétés. **DEV 1** : INJECTIVITÉ DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER Application. Formule d'inversion. Dérivation de la transformée de FOURIER. Formule de PLANCHEREL-PARSEVAL, applications.

B) Transformée de FOURIER dans L^2

Définition de fonction à décroissance rapide, espace de SCHWARTZ. L'application $\mathcal{F}$. Densité de $\mathcal{S}$ dans L^2 .

C) Holomorphie

Théorème de PALEY-WIENER, application.

ANNEXES : Tableau récapitulatif des comparaisons des intégrales, fonction sinus cardinal, noyau de GAUSS, transformée de FOURIER dans les différents espaces, fonction à support compact.

Références :

- GARET-KURTZMANN
- GOURDON
- AMRANI
- ZUILLY

241 : Suites et séries de fonctions.

Exemples et contre-exemples.

Cadre : $(E, ||.||)$ un e.v.n., $X \subset E$ non vide, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(X, E)$ l'ensemble des applications bornées.

I) Différents modes de convergence

A) Convergence simple

Définitions d'une série de fonctions et de la convergence simple d'une suite de fonctions. Reste d'ordre n , exemple.

B) Convergence uniforme

Définition, Uniforme $\Rightarrow$ Simple, réciproque fausse, exemple. Convergence uniforme d'une série, critère de CAUCHY uniforme dans un BANACH.

C) Convergence normale

Définition, Normale $\Rightarrow$ Uniforme, exemple.

II) Stabilité par passage à la limite

A) Continuité

Limite uniforme d'une suite d'applications continues, exemple et contre-exemple. Convergence locale uniforme, exemple de ZÊTA.

B) Dérivabilité

Théorème de convergence d'une suite dérivée. Hypothèse nécessaire, exemple et contre-exemple.

III) Série entière

Définition, lemme d'ABEL, rayon de convergence, règles classiques, continuité et dérivabilité. **DEV 1** : TAUBÉRIEN FORT. Application. Nombre de BELL.

IV) Séries de fourier

Coefficients et série de FOURIER, théorème principaux (PARSEVAL, DIRICHLET), application au calcul de sommes.

V) Espaces de LEBESGUE

Théorèmes de BEPPO LEVI, de FATOU et de convergence dominée. Exemples illustrant la nécessité de chaque hypothèse. Espace de LEBESGUE L^P . **DEV 2** : THÉORÈME DE RIESZ-FISHER. Suite extraite convergeant p.p.. Densité des fonctions étagées et de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$.

Références :

- AMRANI
- GOURDON
- GARET-KURTZMANN

243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

I) Généralités

A) Définitions

Définition, lemme d'ABEL, rayon de convergence. Exemples

B) Calcul pratique du rayon de convergence

Règles classiques de calcul, exemples.

C) Comparaison des rayons de convergence

Comparaison O , o , équivalents, exemples.

II) Propriétés des séries entières

A) Somme et produit des séries entières

Somme de séries entières et son rayon de convergence. Produit de CAUCHY, exemples.

B) Continuité, dérivabilité

Continuité, caractère C^∞ , exemples, séries de TAYLOR, application à l'unicité du D.S.E..

C) Développement en série entière

Définition, développement en série de TAYLOR, contre-exemple. Condition suffisante pour une fonction C^∞ d'être D.S.E.. **DEV 1** : NOMBRE DE BELL.

D) Convergence sur le cercle

Théorème d'ABEL, application. **DEV 2** : TAUBÉRIEN FORT. Application.

III) Applications

A) L'exponentielle complexe

Définitions de l'exponentielle, sinus et cosinus complexes. L'homomorphisme continu surjectif $z \mapsto e^z$.

B) Équations différentielles

Solution d'une équation différentielle, exemples.

C) Dérangements de n

Définition d'un dérangement, propriétés, nombre de dérangements.

ANNEXES : Illustration de la convergence sur le cercle, fonctions trigonométriques complexes.

Références :

- GOURDON
- AMRANI
- ROMBALDI

245 : Fonction d'une variable complexe.
Exemples et applications.

Cadre : $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert.

I) Généralités

A) Analycité

Définitions d'une fonction développable en série entière et d'une fonction analytique, exemples. La $\mathbb{C}$ -algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. Principe du prolongement analytique, des zéros isolés, exemples.

B) Holomorphie

Définition d'une fonction holomorphe, conditions de CAUCHY-RIEMANN, exemples. Dérivée nulle sur un ouvert connexe. Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe.

II) Théorie de cauchy

A) Définitions

Indice, propriétés, calcul pratique de l'indice. Existence de primitive. Lemme de GOURSAT

B) La formule de CAUCHY

Formule de CAUCHY, applications. Analycité des fonctions holomorphes.

III) Propriétés des fonctions holomorphes

A) Résultats fondamentaux

Inégalités de CAUCHY, applications (LIOUVILLE, D'ALEMBERT-GAUSS). Principe du maximum local puis global, exemple.

B) Stabilité par passage à la limite

Convergence uniforme sur tout compact, convergence uniforme sur tout compact d'une suite et d'une série de fonctions holomorphes.

C) Stabilité par intégration

Théorème d'holomorphie sous le signe intégral. Application à la fonction Γ .

IV) Théorème des résidus et applications

A) Résidu

Singularités, caractérisation. Résidu d'une fonction en un point. Théorème des RÉSIDUS. Exemple.

B) Application à la transformée de FOURIER

L'opérateur $\mathcal{F}$, noyau de GAUSS, approximation de l'unité.
DEV 1 : INJECTIVITÉ DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER
DEV 2 : THÉORÈME DE PALEY-WIENER

ANNEXES : Exemples d'indices, noyau de GAUSS, transformée de FOURIER classique

Références :

- TAUVEL
- BECK-MALICK-PEYRÉ
- AMRANI

246 : Séries de FOURIER. Exemples et applications.

I) Généralités

A) Définitions, propriétés

L'espace préhilbertien $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Familles orthonormées et orthogonales de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Définitions des coefficients de FOURIER exponentiel et trigonométriques et leur lien. Propriétés. Série de FOURIER,

B) Égalité de PARSEVAL

Orthogonalité à $\mathcal{P}_N$. Inégalité de BESSEL. Application à la convergence des coefficients de FOURIER. Convolution dans $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, propriétés. Théorème de PARSEVAL, convergence quadratique. Applications à l'inégalité de WIRTINGER, aux calculs de sommes.

II) Noyaux et convergence

A) Exemples de noyaux

Noyaux de DIRICHLET et de FEJÉR, propriétés.

B) Théorème de DIRICHLET

Théorème de DIRICHLET. Application aux calculs de sommes. Convergence normale. DEV 1 : SÉRIE DE FOURIER DES APPLICATIONS CONTINUES.

C) Théorème de FEJÉR et applications

DEV 2 : THÉORÈME DE FEJÉR Application à l'injectivité des coefficients de FOURIER, théorème de WEIERSTRASS.

III) Applications

A) Inégalité isopérimétrique

Courbe de JORDAN, inégalité isopérimétrique.

B) Exemple d'une équation différentielle ordinaire

Équation différentielle ordinaire.

C) Exemple de transformation ergodique

Propriété d'une fonction $f \in L_{2\pi}$ telle que $\tau_h(f) = f$ p.p.. Cas lorsque $h \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

ANNEXES : Noyau de DIRICHLET, courbe de JORDAN

Références :

- AMRANI
- ZULLY-QUEFFELEC

250 : Transformation de FOURIER.
Applications.

Cadre : $d \in \mathbb{N}^*$

I) Transformée de FOURIER dans L^1

A) Définitions, propriétés

Définition de la transformée de FOURIER, alternative. Opérateur $\mathcal{F}$. Exemples. Propriétés via une translation, modulation et homothétie. Formule de dualité.

B) Convolution

L'algèbre commutative $(L^1, ||.||_1)$, approximation de l'unité, exemples. Théorème d'approximation. DEV 1 : INJECTIVITÉ DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER. Application.

C) Formule d'inversion

Théorème, application. Automorphisme de l'algèbre de WIENER.

II) Extension de la transformée de FOURIER

A) Théorème de FOURIER-PLANCHEREL

Formule de PLANCHEREL-PARSEVAL, applications. Densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2 . Opérateur de FOURIER-PLANCHEREL $\mathcal{P}$. Théorème.

B) Espace de SCHWARTZ

Définition, exemple, propriétés. Convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. L'isomorphisme bicontinue de l'opérateur $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

C) Transformée de FOURIER holomorphe

Extension de la transformée de FOURIER à un ouvert

connexe de $\mathbb{C}$. DEV 2 : THÉORÈME DE PALEY-WIENER

III) Applications

A) Base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$

Définition d'une fonction poids, de $L^2(I, \rho)$, théorème d'existence d'une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$

B) Aux équations différentielles

Équations de LAPLACE, problème de DIRICHLET DANS LE DEMI-PLAN SUPÉRIEUR.

ANNEXES : Exemples de noyaux, fonctions classiques et leur transformée.

Références :

- AMRANI
- BECK-MALICK-PEYRÉ

253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Cadre : E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

I) Généralités

- A) Ensembles et fonctions convexes
Partie convexe, application convexe, exemples. Caractérisation d'une fonction convexe. Conséquences.
- B) Inégalités classiques
Inégalités sur l'exponentielle, le logarithme népérien et le sinus. Inégalités arithmético-gométrique, de YOUNG.

II) Applications dans certains espaces

- A) Espace L^p
Espace $\mathcal{L}^p$, inégalité de HÖLDER, application à la fonction GAMMA. Inégalité de MINKOWSKI. Espace L^p . Cas des mesures finies.
- B) Espace probabilisé
Espérance d'une variable aléatoire, inégalité de JENSEN, exemples. Inégalité de HOEFFDING, applications.
- C) Espace de HILBERT
DEV 1 : PROJECTION + RIESZ-FISHER. Application à la densité d'un s.e.v. d'un HILBERT. DEV 2 : THÉORÈME DE STAMPACCHIA. Application au problème de DIRICHLET.

III) Résultats de séparation

Soit E un e.v.n..
Hyperplan affine, caractère fermé d'un hyperplan. Séparation

de parties au sens large / strict. Jauge d'un convexe. Théorème de HAHN-BANACH (géométrie).

IV) Application aux extrema et aux point fixes

Caractérisation d'une application convexe différentiable à valeurs réelles. Application. Unicité d'un minimum pour une application strictement convexe. Inégalité d'EULER. Méthode de NEWTON. Méthode de gradient à pas optimal.

ANNEXES : Projections sur un convexe fermé et sur un sous-espace fermé, inégalité d'EULER, méthode de NEWTON.

Références :

- GOURDON
- GARET-KURTZMANN
- BECK-MALICK-PEYRÉ
- BREZIS

261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples et applications.

Cadre : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. λ la mesure de LEBESGUE.

I) Loi d'une variable aléatoire, propriétés

- A) Définition, caractérisation des variables aléatoires discrètes
Définitions de variable aléatoire, de loi. Exemple. Définition d'une loi discrète. Théorème de caractérisation des lois discrètes, exemples de lois usuelles. Définition d'une loi à densité, exemples de lois usuelles.
- B) Caractérisation par l'espérance des classes de fonctions
Définition de l'espérance. Théorème de transfert. Exemples classiques. Contre-exemple de la loi de CAUCHY. Propriétés de l'espérance. Inégalités de MARKOV et de CHEBYCHEV. Caractérisation par les fonctions tests, exemple.

II) Caractérisation par les fonctions

- A) Fonction de répartition
Définition, exemple. Théorème de caractérisation. Propriété de la fonction de répartition. Loi d'une variable en fonction de F' .
- B) Fonction génératrice
Définition, exemples sur des lois discrètes. Caractérisation. Application. Caractérisation de l'existence de l'espérance + valeur.
- C) Fonction caractéristique
Définition, Caractérisation, propriété de la fonction caractéristique. Calcul des moments.

III) Indépendance

Définition de variables aléatoires indépendantes, exemples. Caractérisation de variables aléatoires indépendantes. Application à l'espérance, fonctions caractéristique et génératrice. **DEV 1 :** INÉGALITÉ DE Hoeffding.

IV) Convergence en loi

Définition, stabilité par fonction continue, par somme. Cas des variables aléatoires discrètes. Théorème de LEVY. Théorème central limite, application de MOIVRE-LAPLACE. Loi faible des grands nombres. Définition de la fonction β , propriétés. **DEV 2 :** MARCHE ALÉATOIRE SUR $[0, 1]$.

Références :

- GARET-KURTZMANN

262 : Convergence d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications.

Cadre : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. λ la mesure de LEBESGUE. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires.

I) Les différents modes de convergence

A) Convergence presque-sûre

Définition de la convergence presque-sûre, stabilité par somme et multiplication par un réel. Exemple. Critère fondamental de la convergence presque-sûre. **DEV 1** : INÉGALITÉ DE Hoeffding.

B) Convergence L^p

Définition, équi-intégrabilité, exemple. Caractérisation de la convergence dans L^p .

C) Convergence en probabilité, comparaison

Définition, stabilité par somme. Exemple. Convergence p.s. $\Rightarrow L^p \Rightarrow$ probabilité. Contre-exemples.

II) Convergence en loi

Définition, cas des variables aléatoires discrètes. Exemples. Théorème du Portmanteau. Un exemple : **DEV 2** : MARCHÉ ALÉATOIRE SUR $[0, 1]$. Théorème de LÉVY.

III) Théorèmes limites

A) Lois des grand nombres

Lemmes de BOREL-CANTELLI, application. Lois faibles des grands nombres. Applications aux probabilités et fréquences asymptotiques.

B) Théorème central limite

T.C.L., applications.

IV) Chaîne de markov

Définition, exemples, matrices stochastiques. Opérateur de translation, MARKOV forte, exemples.

ANNEXES : Implications successives des différents modes de convergence. Marché aléatoire sur $[0, 1]$, sur $\mathbb{Z}$, matrice stochastique et graphe associé.

Références :

- GARET-KURTZMANN
- OUVARD 2
- BARBE-LEDOUX

264 : Variables aléatoires
discrètes. Exemples et applications.

Cadre : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(E, \mathcal{E})$ un espace probablisable.

I) Généralités

A) Définitions, caractérisations

Définition d’une variable aléatoire discrète. Exemple. Caractérisation des lois discrètes.

B) Lois discrètes usuelles

Loi de : Bernoulli, Binomiale, Uniforme, Géométrique, Poisson.

Application à des faits réels :

- Pièce $\rightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$
- Plusieurs pièces indépendamment $\rightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
- Dé à 6 faces $\rightarrow \mathcal{U}([1, 6])$.
- Nb moyen de personnes passées au guichet $\rightarrow \mathcal{P}(\ell N)$.

C) Calcul de moments

Théorème de transfert pour les variables aléatoires discrètes, définition de l’espérance, exemples. Propriétés de l’espérance, définition de la variance.

II) Loi d’un n -uplet, indépendance

Définitions de la loi d’un n -uplet, loi marginale, loi conjointe, indépendance.

DEV 1 : WEIERSTRASS.

Application de l’indépendance pour retrouver la loi marginale à partir des lois conjointes.

DEV 2 : Hoeffding + Application.

III) Théorèmes limites

Loi forte des grand nombres, application. Convergence en loi dans le cadre des v.a. discrètes. Théorème central limite, MOIVRE-LAPLACE.

IV) Chaînes de Markov

Définition, exemples, matrices stochastiques. Opérateur de translation, MARKOV forte, exemples.

Références :

- GARET-KURTZMANN
- OUVARD 1
- BARBE-LEDOUX

265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

I) Utilisation des fonctions usuelles

A) La fonction exponentielle et autour

Définition de l'exponentielle complexe. Propriétés. Définitions des fonctions cosinus et sinus. Formules de MOIVRE et d'EULER. Exemples de linéarisation. Noyaux de DIRICHLET et de FÉJER. Polynôme de CHEBYCHEV

B) Calculs d'intégrales de fonctions usuelles

Primitives de $\sin$, $\cos$. Décomposition en éléments simples.. Exemple. Fonctions $R(\cos(t), \sin(t))$, exemples. Applications aux intégrales de WALLIS, de DIRICHLET et de GAUSS.

II) Les fonctions eulériennes

A) Définitions, propriétés

Définition de la fonction Gamma. Étude de la fonction gamma sur $\mathbb{R}$. Prolongement méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Définition de la fonction Bêta.

B) Applications aux probabilités

Lois, espérances et variances des lois Gamma et Bêta.

DEV 1 : MARCHE ALÉATOIRE SUR $[0, 1]$.

III) Transformée de Fourier

A) Définitions, propriétés

Définition, propriétés de la transformée de FOURIER. Exemples. Propriétés avec la translation, $\mathcal{F}$ est linéaire,

continue et injective. DEV 2 : INJECTIVITÉ DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER. application.

B) Application aux équations différentielles

Dérivée partielle de la transformée de FOURIER. Problème de DIRICHLET. Résolution du problème.

Références :

- RUDIN
- GOURDON
- ZULLY-QUÉFELLEC
- GARET-KURTZMANN
- AMRANI

266 : Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

Cadre : $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

I) Généralités

A) Définitions

Événements indépendants, exemple. Indépendance mutuelle d'une famille quelconque d'événements, puis de sous-tribus, exemples. Indépendance d'une famille de variables aléatoires, exemple.

B) Propriétés

Lien entre loi marginale et loi conjointe. Contre-exemple. Caractérisation par l'espérance, par la fonction caractéristique. (Indépendance) $\Rightarrow$ (non corrélation), réciproque fausse. **DEV 1 :** INÉGALITÉ DE Hoeffding. Applications.

II) Vecteurs gaussiens

Définition, exemple et contre-exemple. Caractérisation des vecteurs gaussiens. Caractérisation de l'indépendance dans le cas gaussien.

III) Théorèmes limites

A) Lois des grands nombres

Lemme de BOREL-CANTELLI, applications. Lois faible et forte des grands nombres, exemple.

B) Théorème de la limite centrale

Théorème de la limite centrale. Application au théorème de MOIVRE-LAPLACE.

IV) Chaînes de markov

Définition, exemple, loi marginale. Exemples. **DEV 2 :** MARCHE ALÉATOIRE SUR $[0, 1]$.

Références :

- BARBE-LEDOUX

267 : Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 et supérieure.

I) Intégrale curviligne

- A) Arc paramétré
Définitions d'arc paramétré, de deux arcs paramétrés équivalents. Forme différentielle de degré 1.
- B) Calculs d'intégrales curvilignes
Définitions, exemple. Théorème de GREEN-RIEMANN, applications.

II) Application à la connexité

Définitions des connexités par arcs et par lignes brisées, (connexe par arcs) $\Rightarrow$ (connexe). Exemple. Cas d'un ouvert d'un $\mathbb{R}$ -e.v.n..

III) Application à l'analyse complexe

- A) Intégration complexe
Définition, indépendance selon 2 chemins équivalents. Exemples. Longueur d'un chemin. Indice d'un chemin fermé, propriétés, nombre de tours.
- B) Théorie de CAUCHY
Formule de CAUCHY, cas d'un cercle, application. Théorème des résidus, application aux calculs d'intégrales.
- C) Application à la transformée de FOURIER
Opérateur $\mathcal{F}$, noyau de GAUSS DEV 1 : INJECTIVITÉ DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER.

IV) Application à la séparation

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
Théorème d'HAHN-BANACH analytique. Hyperplan affine. Séparations au sens large et au sens strict. DEV 2 : THÉORÈME D'HAHN-BANACH GÉOMÉTRIQUE

ANNEXES : Illustrations d'arcs, du théorème de GREEN-RIEMANN, de l'indice d'un lacet. Théorème des résidus. Noyau de GAUSS. Séparation de deux convexes.

Références :

- GOURDON
- TAUVEL
- AMRANI
- BREZIS