

MÉMOIRE DE DEUXIÈME ANNÉE DE MASTER DE MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

DUALITÉ DE SCHUR-WEYL

ALGÈBRES DE HECKE FUSIONNÉES

Ce mémoire est rédigé par DEMESMAY Yoann.
Encadrant : POULAIN D'ANDECY Loïc.
<https://poulain.perso.math.cnrs.fr>

Stage réalisé au laboratoire de mathématiques de Reims.

Table des matières

Introduction	4
1 Algèbres et représentations	7
1.1 Définitions et premiers exemples	7
1.2 Résultats essentiels	9
1.2.1 Résultats classiques de la théorie des représentations	9
1.2.2 Représentations restreinte et induite	13
2 Représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$	14
2.1 Partitions, tableaux de Young	14
2.2 Fonctions de Schur	18
2.3 Diagrammes de Bratelli	20
3 La dualité de Schur-Weyl	22
3.1 Tenseurs symétriques et antisymétriques	22
3.2 Une première décomposition	23
3.2.1 Théorème du double commutant	23
3.2.2 La dualité de Schur-Weyl	25
3.2.3 Construction de Weyl	28
4 Algèbres de Hecke fusionnées	31
4.1 Généralisation de l'algèbre du groupe des permutations	31
4.1.1 Algèbres des permutations fusionnées	31
4.1.2 Extension de la dualité de Schur-Weyl	36
4.1.3 Décomposition de la représentation	37
4.2 Algèbres de Hecke fusionnées	42
4.2.1 Groupe des tresses, tresses fusionnées	42
4.2.2 Ajout d'une indéterminée	43
Conclusion	47

Introduction

La théorie des représentations, omniprésente en mathématiques, a été introduite vers la fin de XIXe siècle par le mathématicien allemand FROBENIUS, motivé par une lettre de DEDEKIND. Cette théorie, étant un outil puissant car elle permet de réduire des problèmes d'algèbre abstraite à des problèmes d'algèbre linéaire, a connu un développement considérable depuis, qui ne saurait être résumé en quelques pages d'un mémoire.

La dualité de SCHUR-WEYL est un résultat fondamental de cette théorie qui relie les représentations irréductibles de dimension finie des groupes linéaires et des groupes symétriques. Il doit son nom à deux pionniers de la théorie des représentations des groupes de LIE, Issai SCHUR, qui a découvert le phénomène, et Hermann WEYL, qui l'a popularisé dans ses livres sur la mécanique quantique et les groupes classiques comme moyen de classer les représentations de groupes linéaires unitaires et généraux.

Cette dualité concerne les actions de $GL(V)$ et $\mathfrak{S}_k$ sur les puissances tensorielles de la forme $\bigotimes_k V$ pour un espace vectoriel (complexe) V de dimension n . Il existe des histoires riches en théorie des représentations, en combinatoire et en mécanique statistique impliquant l'étude et l'utilisation d'algèbres de diagrammes, qui résultent de la restriction de l'action de $GL(V)$ à certains sous-groupes de $GL(V)$.

Récemment, de nouvelles algèbres généralisant l'algèbre des permutations permettent d'obtenir des variantes de la dualité de SCHUR-WEYL. C'est vers quoi s'oriente ce mémoire avec l'étude des algèbres de HECKE fusionnées.

Le mémoire, constitué de quatre chapitres, s'organise de la façon suivante :

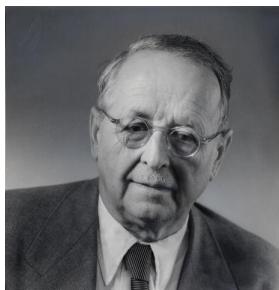
- Le premier chapitre permettra de se familiariser avec les éléments de base de la théorie des représentations, nécessaires pour la suite.
- Le deuxième chapitre est exclusivement consacrée à l'étude et la construction explicites des représentations irréductibles du groupe symétrique, indispensables à la dualité de SCHUR-WEYL.
- C'est le cœur du mémoire : on y verra des résultats généraux et importants d'algèbre qui mènent au résultat portant le nom du mémoire.
- Le but de ce dernier chapitre est de voir une première extension de la dualité de SCHUR-WEYL en introduisant une algèbre généralisant l'algèbre du groupe symétrique.

Portraits de certains mathématiciens ayant contribué à cette théorie :



- Issai SCHUR (1875 – 1941).
- Russe.
- Mathématicien.
- Dualité de SCHUR-WEYL.

-
- Ferdinand Georg FROBENIUS (1849 – 1917).
 - Allemand.
 - Mathématicien.
 - Pionnier de la théorie des représentations.



- Hermann WEYL (1885 – 1955).
- Allemand.
- Mathématicien, physicien théoricien.
- Dualité de SCHUR-WEYL.

-
- Erich HECKE (1887 – 1947).
 - Allemand.
 - Mathématicien.
 - Théories des nombres et des formes modulaires, algèbres portant son nom.



Chapitre 1

Algèbres et représentations

Tous les résultats de base de ce premier chapitre introductif se trouvent, entre autres, dans [GW09].

1.1 Définitions et premiers exemples

Définition 1.1.1. Une **algèbre** (associative unitaire) sur $\mathbb{C}$ est la donnée d'un triplet $(\mathcal{A}, +, \mu)$ tel que :

1. $(\mathcal{A}, +)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
2. $\mu : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ est une application bilinéaire telle que :
 - (unité) Il existe $1_{\mathcal{A}}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{A}$, $\mu(x, 1_{\mathcal{A}}) = \mu(1_{\mathcal{A}}, x) = x$.
 - (associativité) Pour tous $x, y, z \in \mathcal{A}$,

$$\mu(\mu(x, y), z) = \mu(x, \mu(y, z)).$$

Cette algèbre $\mathcal{A}$ est dite **commutative** si, pour tous $x, y \in \mathcal{A}$, $\mu(x, y) = \mu(y, x)$.

Notation 1.1.2. On notera, s'il n'y a pas d'ambiguïté, $1 := 1_{\mathcal{A}}$ et pour $x, y \in \mathcal{A}$, $xy := \mu(x, y)$.

Exemple 1.1.3. 1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, où $\cdot$ désigne la multiplication usuelle, et 1 est l'unité, est une algèbre sur $\mathbb{C}$.

2. Si V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, alors $(\text{End}(V), +, \cdot)$ (1 comme unité) et $(\text{End}(V), +, \circ)$ (Id_V comme unité), où $\cdot$ désigne la multiplication et $\circ$ la composition d'applications sont des algèbres sur $\mathbb{C}$.

3. Soient G un groupe et $\mathbb{C}G := \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f(g) \neq 0 \text{ pour un nombre fini de } g\}$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de base $\{\delta_g\}_{g \in G}$ où $\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = h \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ On définit une multiplication de $\mathbb{C}G$ sur cette base par :

$$\forall g, h \in G, \quad \delta_g \star \delta_h = \delta_{gh}.$$

qu'on étend par bilinéarité à $\mathbb{C}G$. $(\mathbb{C}G, +, \star)$ est une algèbre d'unité δ_{1_G} , appelé **algèbre de groupe** de G .

Définition 1.1.4. Soient $(\mathcal{A}, +, \mu)$ et $(\mathcal{A}', +', \mu')$ deux algèbres sur $\mathbb{C}$. On appelle **morphisme d'algèbres** la donnée d'une application $f : (\mathcal{A}, +, \mu) \mapsto (\mathcal{A}', +', \mu')$ telle que :

1. $f : (\mathcal{A}, +) \longrightarrow (\mathcal{A}', +')$ est une application linéaire.
2. Pour tous $x, y \in \mathcal{A}$, $f(\mu(x, y)) = \mu'(f(x), f(y))$.
3. $f(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{A}'}$.

Remarque 1.1.5. Tout morphisme de groupes $\varphi : G \longrightarrow H$ peut être étendu de façon unique en un morphisme d'algèbre par $\tilde{\varphi} : \mathbb{C}G \longrightarrow \mathbb{C}H$ par :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \quad \mathbb{C}G &\longrightarrow \mathbb{C}H \\ \sum_{g \in G} f(g)\delta_g &\longmapsto \sum_{g \in G} f(g)\delta_{\varphi(g)} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ceci fournit un foncteur de la catégorie des groupes à celle des algèbres.

Définition 1.1.6. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbb{C}$. Une **représentation** de $\mathcal{A}$ est la donnée d'une paire (ρ, V) telle que :

1. V est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
2. $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \text{End}(V)$ est un morphisme d'algèbres.

V est dans ce cas appelé un **$\mathcal{A}$ -module**.

Notation 1.1.7. On notera, s'il n'y a pas d'ambiguïté, pour $a \in \mathcal{A}$ et $v \in V$, $av := \rho(a)(v)$.

Remarque 1.1.8. Si V, W sont deux $\mathcal{A}$ -modules, l'espace vectoriel $V \oplus W$ est muni d'une structure de $\mathcal{A}$ -module par $a(v \oplus w) = av \oplus aw$, $a \in \mathcal{A}$, $(v \oplus w) \in V \oplus W$.

Définition 1.1.9. Soient (ρ, V) une représentation d'une algèbre $\mathcal{A}$ et $U \subset V$ un sous-espace vectoriel de V . On dit que U est **stable** par la représentation (ρ, V) si :

$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad \forall u \in U, \quad \rho(a)(u) \in U.$$

Remarque 1.1.10. Lorsque U est stable par une représentation (ρ, V) , on peut définir deux nouvelles représentations :

- (ρ_U, U) , la restriction de $\rho(\mathcal{A})$ à U .
- $(\rho_{V/U}, V/U)$, via l'action naturelle de $\rho(\mathcal{A})$ sur V/U .

Définition 1.1.11. Une représentation (ρ, V) d'une algèbre $\mathcal{A}$ est dite **irréductible** si les seuls sous espaces vectoriels de V stables par la représentation sont $\{0_V\}$ et V .

Définition 1.1.12. Soient (ρ, V) et (τ, W) deux représentations. Notons $\text{Hom}(V, W)$ l'espace vectoriel des applications de V dans W $\mathbb{C}$ -linéaires. Un **morphisme de représentations** entre V et W est la donnée d'un élément φ de $\text{Hom}(V, W)$ tel que :

$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad \tau(a) \circ \varphi = \varphi \circ \rho(a).$$

Autrement dit, le diagramme suivant, pour tout $a \in \mathcal{A}$, est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \rho(a) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \tau(a) \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

(ρ, V) et (τ, W) sont dites **équivalentes** s'il existe un morphisme de $\mathcal{A}$ -modules inversible.

Notation 1.1.13. On note $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)$ l'ensemble des morphismes de $\mathcal{A}$ -modules. Si $V = W$ et $\rho = \tau$, on note $\text{End}_{\mathcal{A}}(V) := \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, V)$.

Remarque 1.1.14. La composition de deux morphismes de $\mathcal{A}$ -modules est un morphisme de $\mathcal{A}$ -modules. En particulier, $\text{End}_{\mathcal{A}}(V)$ est une algèbre.

Exemple 1.1.15. Lorsque $U \subset V$ est stable sous l'action de (ρ, V) , l'inclusion $U \rightarrow V$ et le morphisme quotient $V \rightarrow V/U$ sont deux morphismes de $\mathcal{A}$ modules.

Lemme 1.1.16. Soient $\mathcal{A}$ une algèbre, (ρ, V) , (τ, W) deux représentations de $\mathcal{A}$ et $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)$ non nulle.

Si V est irréductible, alors on a un isomorphisme de représentation $V \cong \varphi(V)$.
En particulier, $\varphi(V)$ est irréductible.

Démonstration. Il est évident que $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$ est un morphisme de représentations surjective. Elle est injective puisque le noyau de φ est un sous- $\mathcal{A}$ -module propre de V (car φ est non nulle) et l'irréductibilité de V permet d'affirmer que $\text{Ker}(\varphi) = \{0_V\}$, d'où le résultat. $\square$

1.2 Résultats essentiels

1.2.1 Résultats classiques de la théorie des représentations

Lemme 1.2.1. (Schur) Soient (ρ, V) et (τ, W) deux représentations irréductibles, où V et W sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ de dimension dénombrable. Alors :

$$\dim(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\rho, V) \cong (\tau, W) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Cf. [GW09] section (4.1.2). $\square$

Théorème 1.2.2. (Burnside) Soit (ρ, V) une représentation irréductible d'une algèbre $\mathcal{A}$ où V est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie. Alors $\rho(\mathcal{A}) = \text{End}(V)$.
En particulier, l'image d'une algèbre par une représentation irréductible de dimension finie est entièrement déterminée par la dimension de cette dernière.

Démonstration. Cf. [GW09] section (4.1.3). $\square$

Définition 1.2.3. Une représentation (ρ, V) d'une algèbre $\mathcal{A}$ est dite **complètement réductible** si pour tout sous- $\mathcal{A}$ -module U , il existe un supplémentaire de U dans V stable par la représentation.

Lemme 1.2.4. Soient (ρ, V) une représentation d'une algèbre $\mathcal{A}$ complètement réductible et U un sous- $\mathcal{A}$ -module. Alors :

1. (ρ_U, U) est complètement réductible.
2. $(\rho_{V/U}, V/U)$ est complètement réductible.

Démonstration. Cf. [GW09] section (4.1.4). $\square$

Définition 1.2.5. Soit $(\mathcal{A}, +, \mu)$ une algèbre.

Un **idéal** bilatère V de $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$ stable par la multiplication μ , i.e. :

$$\forall a \in \mathcal{A}, \forall v \in V, \begin{cases} \mu(a, v) \in V, \\ \mu(v, a) \in V. \end{cases}$$

$\mathcal{A}$ est dite **simple** si $\mathcal{A}$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathcal{A}}\}$ et si les seuls idéaux de $\mathcal{A}$ sont $\{0_{\mathcal{A}}\}$ et $\mathcal{A}$.
 $\mathcal{A}$ est dite **semi-simple** lorsque elle est isomorphe à une somme directe d'algèbres simples.

Remarque 1.2.6. Toute représentation de dimension finie d'une algèbre semi-simple est complètement réductible.

Théorème 1.2.7. (Maschke) Soit G un groupe fini. Tout $\mathbb{C}G$ -module est semi-simple et l'algèbre $\mathbb{C}G$ est semi-simple.

Démonstration. Cf. [GW09] section (3.3.1). $\square$

Théorème 1.2.8. (Wedderburn) Les algèbres simples de dimension finie sur $\mathbb{C}$ sont les $\text{End}(V)$, où V est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie (à isomorphisme près).

Démonstration. Voyons d'abord que si V est un espace vectoriel de dimension finie, alors $\text{End}(V)$ est une algèbre simple. Soient $\{0_{\text{End}(V)}\} \neq \mathcal{B} \subset \text{End}(V)$ un idéal bilatère et $0 \neq v \in V$. On a clairement que $\text{End}(V)v = V$. Ainsi, on a : $\mathcal{B}v = \mathcal{B}\text{End}(V)v = \mathcal{B}V$. Or $\mathcal{B}V \neq 0$ car $\mathcal{B} \neq \{0_{\text{End}(V)}\}$ et $\text{End}(V)\mathcal{B}V \subset \mathcal{B}V$. Ainsi $\mathcal{B}v = V$ pour tout $0 \neq v \in V$. Ainsi, V est un $\mathcal{B}$ -module irréductible. Par le théorème de BURNSIDE, on a que $\mathcal{B} = \text{End}(V)$. Ainsi, $\text{End}(V)$ est une algèbre simple.

Donnons-nous maintenant $\mathcal{A}$ une algèbre simple de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et voyons qu'elle est nécessairement isomorphe à $\text{End}(V)$, V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie. On définit la représentation régulière (à gauche) :

$$\begin{aligned} \lambda : \mathcal{A} &\longrightarrow \text{End}(\mathcal{A}) \\ x &\longrightarrow \lambda(x) \end{aligned}$$

où $\lambda(x)(y) = xy$, $x, y \in \mathcal{A}$. Soit $V \subset \mathcal{A}$ un idéal à gauche de dimension minimale strictement positive et considérons ρ la restriction de λ à V . Alors (ρ, V) est une représentation irréductible

de $\mathcal{A}$ par hypothèse sur V . Mais alors $\rho(\mathcal{A}) = \text{End}(V)$ par le théorème de BURNSIDE. On vérifie aisément que $\text{Ker}(\rho) := \{x \in \mathcal{A} \mid \rho(x) = 0_{\text{End}(V)}\}$ est un idéal bilatère de $\mathcal{A}$, donc est réduit à $\{0_{\mathcal{A}}\}$ par hypothèse sur $\mathcal{A}$. Mais alors $\mathcal{A} \cong \rho(\mathcal{A})$ comme algèbre. $\square$

Théorème 1.2.9. (Artin-Wedderburn) *Les algèbres semi-simples de dimension finie sont les sommes directes finies d'algèbres de la forme $\text{End}(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie.*

Démonstration. Conséquence immédiate de la définition d'une algèbre semi-simple et du théorème (1.2.8). $\square$

CONSÉQUENCE : Soit $\mathcal{A}$ une algèbre semi-simple de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Il existe des espaces vectoriels de dimension finie V^λ (les représentations irréductibles de $\mathcal{A}$) où λ parcourt un ensemble fini Λ et un isomorphisme d'algèbre :

$$\Phi : \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \text{End}(V^\lambda) \quad (1.2)$$

Corollaire 1.2.10. *Soit A une algèbre semi-simple de dimension finie. Alors on a l'égalité :*

$$\dim(\mathcal{A}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim(V^\lambda)^2.$$

Définition 1.2.11. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre semi-simple de dimension finie sur $\mathbb{C}$. On définit $E_\lambda \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \text{End}(V^\lambda)$ par $E_\lambda := 0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus I_{V^\lambda} \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0$, où les V^λ viennent de (1.2). On identifie $\Phi(\mathcal{A})E_\lambda = \text{End}(V^\lambda)$.*

Alors on définit une représentation, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, (π^λ, V^λ) , par :

$$\forall x \in V^\lambda, \quad \pi^\lambda(x) = \Phi(x)E_\lambda.$$

Proposition 1.2.12. *Les $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ satisfont les propriétés suivantes :*

- $\Phi^{-1}(E_\lambda) \cdot x = x \cdot \Phi^{-1}(E_\lambda)$ pour tout $x \in \mathcal{A}$.
- Pour $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\Phi^{-1}(E_\lambda) \cdot \Phi^{-1}(E_\mu) = \delta_{\lambda\mu} \Phi^{-1}(E_\lambda)$. En particulier, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\Phi^{-1}(E_\lambda)$ est un idempotent, i.e. $(\Phi^{-1}(E_\lambda))^2 = \Phi^{-1}(E_\lambda)$.
- $\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi^{-1}(E_\lambda) = \text{Id}_{\mathcal{A}}$.

Démonstration. Il s'agit de vérifications immédiates. $\square$

Théorème 1.2.13. *Les représentations irréductibles de $\mathcal{A}$ sont les (π^λ, V^λ) , $\lambda \in \Lambda$ (à isomorphismes de $\mathcal{A}$ -modules près). De plus, elles sont non équivalentes deux à deux.*

Démonstration. Il est clair que pour tout $\lambda \in \Lambda$, (π^λ, V^λ) est irréductible puisque $\pi^\lambda(\mathcal{A}) = \text{End}(V^\lambda)$. Donnons-nous $\lambda \neq \mu \in \Lambda$ et $T \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V^\lambda, V^\mu)$. En remarquant que $\pi^\lambda(x) = \pi^\lambda(\Phi^{-1}(E_\lambda)x)$ pour tout $x \in \mathcal{A}$, il vient :

$$T \circ \pi^\lambda(x) = T \circ \pi^\lambda(\Phi^{-1}(E_\lambda)x) = \pi^\mu(\Phi^{-1}(E_\lambda)x) \circ T = \pi^\mu(\underbrace{\Phi^{-1}(E_\mu)\Phi^{-1}(E_\lambda)}_{=0}x) \circ T = 0$$

et donc $T = 0$, d'où $\pi^\lambda \not\cong \pi^\mu$.

Soit (π, V) une représentation irréductible de $\mathcal{A}$. Comme $\sum_{\lambda \in \Lambda} \Phi^{-1}(E_\lambda) = 1_{\mathcal{A}}$, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $\pi(\Phi^{-1}(E_\lambda))V \neq 0$. Remarquons que :

$$\pi(x) \circ \pi(\Phi^{-1}(E_\lambda))V = \pi(x\Phi^{-1}(E_\lambda))V = \pi(\Phi^{-1}(E_\lambda)) \circ \pi(x)V \subset \pi(\Phi^{-1}(E_\lambda))V$$

donc $\pi(\Phi^{-1}(E_\lambda))V$ est un sous- $\mathcal{A}$ -module, d'où $\pi(\Phi^{-1}(E_\lambda))V = V$. De plus, pour $\mu \neq \lambda$, on a :

$$\pi(\Phi^{-1}(E_\mu))V = \pi(\Phi^{-1}(E_\mu)) \circ \pi(\Phi^{-1}(E_\lambda))V = \underbrace{\pi(\Phi^{-1}(E_\mu)\Phi^{-1}(E_\lambda))}_{=0} V = 0$$

d'où $\pi(x) = \pi(\Phi^{-1}(E_\lambda)x)$ pour tout $x \in \mathcal{A}$. Or l'application :

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(E_\lambda)\mathcal{A} &\xrightarrow{\cong} \text{End}(V^\lambda) \\ \Phi^{-1}(E_\lambda)x &\longmapsto \pi^\lambda(x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres. On peut ainsi voir (π, V) comme représentation irréductible de $\text{End}(V^\lambda)$. On dispose d'un isomorphisme $T : V \longrightarrow V^\lambda$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{A}$:

$$T \circ \pi(\Phi^{-1}(E_\lambda)x) = \pi^\lambda(\Phi^{-1}(E_\lambda)x) \circ T$$

donc $(\pi, V) \cong (\pi^\lambda, V^\lambda)$. □

CONSÉQUENCE : On peut identifier l'ensemble Λ de (1.2) avec l'ensemble $\hat{\mathcal{A}}$ des classes d'équivalence des représentations irréductibles de $\mathcal{A}$. En particulier, $\hat{\mathcal{A}}$ est un ensemble fini et on peut écrire (1.2) comme :

$$\Phi : \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\lambda \in \hat{\mathcal{A}}} \text{End}(V^\lambda) \quad (1.3)$$

Soient $\mathcal{A}$ donné par (1.3) et (ρ, W) une représentation de $\mathcal{A}$ de dimension finie. Notons $U^\lambda := \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V^\lambda, W)$ pour $\lambda \in \hat{\mathcal{A}}$.

On munit l'espace vectoriel $U^\lambda \otimes V^\lambda$ d'une structure de $\mathcal{A}$ -modules via l'action définie par :

$$a \cdot (u_\lambda \otimes v_\lambda) = u_\lambda \otimes (a \cdot v_\lambda) \quad \forall a \in \mathcal{A}, \forall u_\lambda \in U^\lambda \text{ et } \forall v_\lambda \in V^\lambda. \quad (1.4)$$

qu'on étend par linéarité à $U^\lambda \otimes V^\lambda$.

Proposition 1.2.14. *L'application S définie par :*

$$\begin{aligned} S : \bigoplus_{\lambda \in \hat{\mathcal{A}}} U^\lambda \otimes V^\lambda &\longrightarrow W \\ \sum_{\lambda \in \hat{\mathcal{A}}} u_\lambda \otimes v_\lambda &\longmapsto \sum_{\lambda \in \hat{\mathcal{A}}} u_\lambda(v_\lambda) \end{aligned} \quad (1.5)$$

est isomorphisme de $\mathcal{A}$ -modules.

De plus, on a, pour tout $x \in \mathcal{A}$:

$$S^{-1} \circ \rho(x) \circ S = \bigoplus_{\lambda \in \hat{\mathcal{A}}} I_{U^\lambda} \otimes \pi^\lambda(x) \quad (1.6)$$

Démonstration. Posons, pour $\lambda \in \hat{\mathcal{A}}$, $P_\lambda = \rho(\Phi^{-1}(E_\lambda))$. Comme ρ est une représentation, il vient :

$$\forall \mu, \lambda \in \hat{\mathcal{A}}, \quad P_\lambda P_\mu = \delta_{\lambda\mu} P_\lambda \quad \text{et} \quad \sum_{\lambda \in \hat{\mathcal{A}}} P_\lambda = I_W.$$

Ainsi, $W = \bigoplus_{\lambda \in \hat{A}} W^\lambda$, où $W^\lambda := P_\lambda W$ et $\rho(\Phi^{-1}(E_\lambda)\mathcal{A})W^\mu = \delta_{\lambda\mu}W^\lambda$, donc le sous-espace W^λ est un module pour $\Phi^{-1}(E_\lambda)\mathcal{A} \cong \text{End}(V^\lambda)$. On dispose alors d'un isomorphisme $S_\lambda : U^\lambda \otimes V^\lambda \longrightarrow W^\lambda$ de $\text{End}(V^\lambda)$ -modules. Mais comme $S = \bigoplus_{\lambda \in \hat{A}} S_\lambda$, S est un isomorphisme de $\mathcal{A}$ -modules.

La preuve du dernier point de la proposition est omise, cf. [GW09]. $\square$

Proposition 1.2.15. Soient $\mathcal{A}$ une algèbre et (ρ, V) une représentation de $\mathcal{A}$ complètement réductible. Alors $\rho(\mathcal{A})$ est une algèbre semi-simple.

Démonstration. Cf. [GW09]. $\square$

1.2.2 Représentations restreinte et induite

Soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G , (ρ, V) une représentation du groupe G de dimension finie et (μ, F) une représentation du groupe H de dimension finie.

Notation 1.2.16. On note $\mathbb{C}[G, F]$ l'ensemble des applications ensemblistes de G dans F .

Définition 1.2.17. On définit deux nouvelles représentations :

- $\text{Res}_H^G \rho : H \longrightarrow \text{End}(V)$ la **restriction** de ρ à H .
- En posant $\mathcal{I}_\mu := \{f \in \mathbb{C}[G, F] \mid \forall h \in H, \forall g \in G, f(gh) = \mu(h)^{-1}f(g)\}$,

$$\begin{aligned} \text{Ind}_H^G : G &\longrightarrow \text{End}(\mathcal{I}_\mu) \\ g &\longmapsto \begin{cases} \mathcal{I}_\mu &\longrightarrow \mathcal{I}_\mu \\ f &\longmapsto L(g)(f) \end{cases} \end{aligned}$$

où $L(f)(g)(x) = f(g^{-1}x)$ pour $x \in G$.

Théorème 1.2.18. (Frobenius) On a un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\text{Hom}_G(\rho, \text{Ind}_H^G(\mu)) \cong \text{Hom}_H(\text{Res}_H^G(\rho), \mu) \quad (1.7)$$

Démonstration. Cf. [GW09] section (4.4.1). $\square$

Corollaire 1.2.19. Si de plus V et F sont irréductibles, alors :

$$\text{Multiplicité de } \rho \text{ dans } \text{Ind}_H^G(\mu) = \text{Multiplicité de } \mu \text{ dans } \text{Res}_H^G(\rho). \quad (1.8)$$

Démonstration. Cf. [GW09] section (4.4.1). $\square$

Chapitre 2

Représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$

Les résultats de chapitre se trouveront essentiellement dans [CSST10] et [CAV17].

2.1 Partitions, tableaux de Young

Définition 2.1.1. Une **partition** d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est une suite d'entiers strictement positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ et $|\lambda| := \sum_{i=1}^r \lambda_i = n$.

Notation 2.1.2. On note $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ une partition de n et $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des partitions de n .

Définition 2.1.3. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ une partition. La **multiplicité** de l'indice $i \in \{1, \dots, r\}$ dans λ est le nombre, noté $m_i(\lambda)$, défini par :

$$m_i(\lambda) := \text{Card}\{j \mid \lambda_j = i\}.$$

Exemple 2.1.4. $n = 6$, $\lambda = (3, 2, 1)$, $m_1(\lambda) = m_2(\lambda) = m_3(\lambda) = 1$.

Définition 2.1.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **type** de σ le n -uplet $(i_1, \dots, i_n)$ où i_j , $j \in \{1, \dots, n\}$, désigne le nombre de j -cycles dans sa décomposition (unique) à supports disjoints.

Notation 2.1.6. On note $T(\sigma)$ le type de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Exemple 2.1.7. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, alors $T(\sigma) = (0, 0, 0, 0, 1)$.

Proposition 2.1.8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose d'une bijection entre l'ensemble des types des permutations de $\mathfrak{S}_n$ et l'ensemble des partitions de n .

Démonstration. Cf. [CSST10] (3.1.1). □

L'introduction de la notion de partition d'un entier est justifiée par les deux résultats classiques mais importants qui suivent :

Théorème 2.1.9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, σ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Alors s'équivalent :

$$(\exists \delta \in \mathfrak{S}_n, \tau = \delta \circ \sigma \circ \delta^{-1}) \iff (\sigma \text{ et } \tau \text{ sont de même type})$$

Démonstration. Résulte immédiatement de l'égalité : $\sigma \circ (a_1, \dots, a_k) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k))$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $k \in \{2, \dots, n\}$ et $a_1, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$ distincts deux à deux. $\square$

Théorème 2.1.10. *Soit G un groupe fini. Le nombre de représentations irréductibles de $\mathbb{C}G$ est égal au nombre de classes de conjugaison de G .*

Remarque 2.1.11. G étant fini, le théorème assure en particulier qu'il n'y a qu'un nombre fini de représentations irréductibles.

CONSÉQUENCE : Il y a autant de représentations irréductibles de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ que de partitions de n .

Définition 2.1.12. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ une partition de n . On appelle **diagramme de Young** de λ l'ensemble :

$$D_\lambda := \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Remarque 2.1.13. Afin de se représenter visuellement les diagrammes de YOUNG, on procède ainsi : pour une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$, on lui associe un diagramme à ℓ lignes et chaque ligne contient λ_ℓ boîtes vides puis on identifie chaque élément (i, j) de D_λ à la boîte vide de ce diagramme se situant à la i -ème ligne et j -ième colonne.

Exemple 2.1.14. Pour $n = 14$, on a

$$\lambda = (4, 3, 2, 2, 2, 1) \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \mu = (5, 5, 2, 1, 1) \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}.$$

Définition 2.1.15. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ une partition de n . On appelle **tableau de Young** de forme λ toute application f de D_λ à $\mathbb{N}^*$.

Il est dit **semi-standard** si les nombres sont croissants selon les lignes et strictement croissants selon les colonnes.

Il est dit **standard** si l'application f est en bijection avec $\{1, \dots, n\}$ et si les nombres sont (strictement) croissants selon les lignes et les colonnes.

On définit les ensembles :

$$STab(\lambda) := \{\text{Tableaux de Young de forme } \lambda \text{ standards}\}$$

et

$$STab(n) := \bigcup_{\lambda \vdash n} Stab(\lambda).$$

Exemple 2.1.16. Pour $n = 6$:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 7 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \in STab(\lambda) \quad \rightsquigarrow \lambda = (3, 2, 1) \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \in STab(\lambda)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
Pas standard / Semi-standard
 $\underbrace{\hspace{10em}}$
Standard / Semi-standard

Notation 2.1.17. On note, pour $\lambda \in \mathcal{P}_n$, $\text{Num}(\lambda)$ l'ensemble des tableaux de YOUNG où l'application $f : D_\lambda \rightarrow \mathbb{N}^*$ est une bijection sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Définition 2.1.18. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathcal{P}_n$. On définit une action (à gauche) du groupe $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble $\text{Num}(\lambda)$ par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n \times \text{Num}(\lambda) &\longrightarrow \text{Num}(\lambda) \\ (\sigma, T) &\longmapsto \sigma.T \end{aligned}$$

où le coefficient $i_{(x,y)} \in \{1, \dots, n\}$ de $(x, y) \in D_\lambda$ est envoyé sur $\sigma(i_{(x,y)})$, pour tout $(x, y) \in D_\lambda$.

Exemple 2.1.19. Pour $n = 6$, $\lambda = (3, 2, 1)$ et $\sigma = (1, 2) \circ (3, 6) \in \mathfrak{S}_6$, on a :

$$T := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 2 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \sigma.T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 6 & 4 \\ \hline 5 & 1 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}.$$

Définition 2.1.20. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathcal{P}_n$ et $T \in \text{Num}(\lambda)$. On appelle :

- **Groupe des lignes** de T le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ qui, pour chaque ligne de D_λ , stabilise le sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$ constitué des entiers qui remplissent les boîtes de la ligne considérée.
- **Groupe des colonnes** de T le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ qui, pour chaque colonne de D_λ , stabilise le sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$ constitué des entiers qui remplissent les boîtes de la colonne considérée.

Notation 2.1.21. Le groupe des lignes de T sera noté $R(T)$ et celui des colonnes $C(T)$.

Exemple 2.1.22. Pour $n = 3$ et $\lambda = (2, 1)$. $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}$, on a $R(T) = \{Id_{\mathfrak{S}_3}, (2, 3)\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $C(T) = \{Id_{\mathfrak{S}_3}, (1, 2)\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Définition 2.1.23. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathcal{P}_n$ et $T \in \text{Num}(\lambda)$. On définit les deux éléments suivants de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$:

$$a_T := \sum_{\sigma \in R(T)} \delta_\sigma \quad \text{et} \quad b_T := \sum_{\sigma \in C(T)} \epsilon(\sigma) \delta_\sigma.$$

Le **symétriseur** de YOUNG associé à λ de n et à T est l'élément de l'algèbre $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ défini par :

$$c_T = a_T b_T.$$

Exemple 2.1.24. En reprenant n, λ et T de (2.1.22), on a : $a_T = \delta_{Id_{\mathfrak{S}_3}} + \delta_{(2,3)}$, $b_T = \delta_{Id_{\mathfrak{S}_3}} - \delta_{(1,2)}$ et $c_T = \delta_{Id_{\mathfrak{S}_3}} - \delta_{(1,2)} + \delta_{(2,3)} - \delta_{(1,3,2)}$.

Définition 2.1.25. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathcal{P}_n$, $T \in \text{Num}(\lambda)$. On définit V_T l'idéal à gauche de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ engendré par c_T , i.e., $V_T := \mathbb{C}\mathfrak{S}_n.c_T$.

Si $T \in \text{Num}(\lambda)$ est la numérotation de λ dans l'ordre d'écriture occidental par les entiers $1, \dots, n$ pris dans cet ordre, alors on note $V_\lambda := V_T$.

Exemple 2.1.26. Pour $n = 6$, on a les différents éléments de λ dont la numérotation de λ est dans l'ordre d'écriture occidental par les entiers $1, 2, 3, 4, 5, 6$ pris dans cet ordre :

- $\lambda = (6) : T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}.$

$$\bullet \lambda = (1, 1, 1, 1, 1, 1) : T = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array}.$$

$$\bullet \lambda = (3, 2, 1) : T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}.$$

$$\bullet \lambda = (2, 2, 2) : T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array}.$$

Le résultat fondamental suivant justifie l'introduction de symétriseur de YOUNG et permet de construire explicitement les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$.

Théorème 2.1.27. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathcal{P}_n$. Le $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ -module V_λ est irréductible. De plus, si $\lambda \neq \mu \in \mathcal{P}_n$, les $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ -modules V_λ et V_μ ne sont pas isomorphes (comme $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ -modules).

Démonstration. Cf. [CAV17] section (2.2). □

Remarque 2.1.28. Par ce qui précède, on obtient ainsi une construction explicite de chaque représentation irréductible de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 2.1.29.

- $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda = (n)$, $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array}$: on a $R(T) = \mathfrak{S}_n$, $C(T) = \{Id_{\mathfrak{S}_n}\}$ et $c_T = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \delta_\sigma$. On a $\dim(V_\lambda) = 1$ et c'est la représentation triviale car $\{c_T\}$ est une base de V_λ et $\delta_\sigma \cdot c_T = c_T$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda = (1, \dots, 1)$, $T = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}$: on a $R(T) = \{Id_{\mathfrak{S}_n}\}$, $C(T) = \mathfrak{S}_n$ et $c_T = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \delta_\sigma$. On a $\dim(V_\lambda) = 1$ et c'est la représentation signature car $\{c_T\}$ est une base de V_λ et $\delta_\sigma \cdot c_T = \epsilon(\sigma)c_T$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- $n = 3$, $\lambda = (2, 1)$, $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$: on a $R(T) = \{Id_{\mathfrak{S}_3}, (1, 2)\}$, $C(T) = \{Id_{\mathfrak{S}_3}, (1, 3)\}$ et $c_T = \delta_{Id_{\mathfrak{S}_3}} + \delta_{(1,2)} - \delta_{(1,3)} - \delta_{(1,3,2)}$. La représentation V_λ est par définition l'application :

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{C}\mathfrak{S}_3 &\longrightarrow \text{End}(V_\lambda) \\ x &\longmapsto \begin{cases} V_\lambda &\longrightarrow V_\lambda \\ y &\longmapsto x \star y \end{cases} \end{aligned}$$

Fixons $e_1 := \delta_{Id_{\mathfrak{S}_3}}$, $e_2 := \delta_{(1,2)}$, $e_3 := \delta_{(1,3)}$, $e_4 := \delta_{(2,3)}$, $e_5 := \delta_{(1,2,3)}$ et $e_6 := \delta_{(1,3,2)}$. Alors $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, 6\}}$ est une base de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_3$. L'application ϕ définie par :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}\mathfrak{S}_3 &\longrightarrow \mathbb{C}\mathfrak{S}_3 \\ x &\longmapsto x \star c_T \end{aligned}$$

est clairement linéaire et d'image V_λ . Un calcul élémentaire d'algèbre linéaire nous donne une

base de V_λ , à savoir $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. En particulier, on a $\dim(V_\lambda) = 2$. On en déduit alors,

une fois cette base $\mathcal{B}$ fixée, la représentation via les $\{\rho(e_i)\}_{i \in \{1, \dots, 6\}}$, à savoir :

$$\begin{aligned} \delta_{Id_{\mathfrak{S}_3}} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \delta_{(1,2)} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \delta_{(1,3)} &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \delta_{(2,3)} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \delta_{(1,2,3)} &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \delta_{(1,3,2)} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.2 Fonctions de Schur

Fixons $X_1, \dots, X_n$ n variables, $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 2.2.1. Pour un n -uplet $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, on pose :

$$X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}.$$

On définit le polynôme a_α par :

$$a_\alpha := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) X_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \dots X_{\sigma(n)}^{\alpha_n}.$$

Remarque 2.2.2. $(a_\alpha \neq 0) \iff (\forall i \neq j, \alpha_i \neq \alpha_j)$

Définition 2.2.3. Soit λ une partition de n . La **fonction de Schur** associée à λ est le quotient de $a_{\lambda+\delta}$ par a_δ , où $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ et où $\lambda + \delta$ désigne la somme terme à terme.

Remarque 2.2.4. On étend la définition de partition en adjoignant des 0 si la partition n'est pas un n -uplet afin que la somme $\lambda + \delta$ ait un sens.

Proposition 2.2.5. Soit λ une partition (au sens élargi, cf. remarque (2.2.4)) d'un entier $d \in \mathbb{N}^*$. Alors s_λ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$, symétrique et homogène de degré d .

Exemple 2.2.6. $n = 2$, $\lambda = (2, 1)$. Alors $\delta = (1, 0)$ et $\lambda + \delta = (3, 1)$. On a donc :

$$a_{\lambda+\delta} = X_1^3 X_2 - X_1 X_2^3 \text{ et } a_\delta = X_1 - X_2$$

Ainsi,

$$s_{(2,1)}(X_1, X_2) = X_1^2 X_2 + X_1 X_2^2$$

Définition 2.2.7. Soient λ une partition de n et $T \in \text{Stab}(\lambda)$. On définit :

- (**crochet**) Pour $(i, j) \in D_\lambda$, $H_\lambda(i, j) := \{(i, y) \in D_\lambda \mid y \geq j\} \cup \{(x, j) \in D_\lambda \mid x \geq i\}$. Autrement dit, un élément du crochet $H_\lambda(i, j)$ est un élément du diagramme de YOUNG situé ou bien sur la même colonne et en dessous que $(i, j) \in D_\lambda$, ou bien sur la même ligne que $(i, j) \in D_\lambda$ et à sa droite.
- $h_\lambda(i, j) = \text{Card}(H_\lambda(i, j))$.

Exemple 2.2.8. Pour $n = 5$ et $\lambda = (2, 1, 1, 1)$, considérons :

$$T_\lambda := \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}.$$

Alors $H_\lambda(1, 1) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$, $H_\lambda((2, 1)) = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$ et $H_\lambda((1, 2)) = \{(1, 2)\}$, puis $h_\lambda(1, 1) = 5$, $h_\lambda(2, 1) = 3$, et $h_\lambda(1, 2) = 1$.

Comme $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ est semi-simple, la formule donnée en (1.3) fournit l'isomorphisme d'algèbres

$$\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \text{End}(V_\lambda)$$

où les $(V_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{P}_n}$ désignent les représentations irréductibles non équivalentes deux à deux de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. Le résultat suivant permet de déterminer la dimension de chaque représentation irréductible V_λ .

Théorème 2.2.9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathcal{P}_n$. On a $\dim(V_\lambda) = \text{Card}(\text{STab}(\lambda))$.

Démonstration. Cf. [CSST10] section (3.2.2). □

Exemple 2.2.10. • $\lambda = (n) \rightsquigarrow \boxed{} \boxed{} \cdots \boxed{} \boxed{} : c'est la représentation triviale.$

• $\lambda = (1, \dots, 1) \rightsquigarrow \begin{array}{|c|} \hline \boxed{} \\ \hline \boxed{} \\ \hline \boxed{} \\ \hline \boxed{} \\ \hline \boxed{} \\ \hline \end{array} : c'est la signature.$

• $n = 4$, $\lambda = (2, 1, 1) : 3$ tableaux de YOUNG de forme λ standards.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

Cependant, on se rend compte rapidement qu'il est très compliqué de déterminer naïvement le cardinal d'un ensemble $\text{STab}(\lambda)$ pour une partition arbitraire. La formule suivante permet de résoudre ce problème.

Théorème 2.2.11. ("Hook length formula")

Soit λ une partition de n . Alors on la formule suivante :

$$\text{Card}(\text{STab}(\lambda)) = \frac{n!}{\prod_{(x,y) \in D_\lambda} h_\lambda(x,y)}.$$

Démonstration. Cf. [GW09] section (9.1.2). □

Remarque 2.2.12. • Il existe plusieurs preuves de cette jolie formule. Une utilise les fonctions de SCHUR.

• Cette formule nous permet de connaître les dimensions de toutes les représentations irréductibles de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$.

Exemple 2.2.13. — $n = 4$:

- $\lambda = (4) \rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 1.$
- $\lambda = (1, 1, 1, 1) \rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 1.$
- $\lambda = (3, 1) \rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 3.$
- $\lambda = (2, 2) \rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 2.$
- $\lambda = (2, 1, 1) \rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 3.$

Conclusion : Deux représentations irréductibles de dimension 1, deux de dimension 3 et une seule de dimension 2. Ainsi, après avoir fixé une base des espaces vectoriels de chaque représentation on obtient l'isomorphisme d'algèbres :

$$\mathbb{C}\mathfrak{S}_4 \cong \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})^{\oplus 2}.$$

— $n = 5$:

- $\lambda = (5) \rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 1.$
- $\lambda = (1, 1, 1, 1, 1) \rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 1.$
- $\lambda = (4, 1) \rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 4.$
- $\lambda = (3, 2) \rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 5.$
- $\lambda = (2, 2, 1) \rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 5.$
- $\lambda = (3, 1, 1) \rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 6.$
- $\lambda = (2, 1, 1, 1) \rightsquigarrow \text{Card}(STab(\lambda)) = 4.$

On obtient de même l'isomorphisme d'algèbres :

$$\mathbb{C}\mathfrak{S}_5 \cong \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_4(\mathbb{C})^{\oplus 2} \oplus M_5(\mathbb{C})^{\oplus 2} \oplus M_6(\mathbb{C}).$$

2.3 Diagrammes de Bratelli

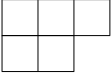
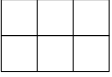
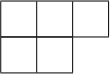
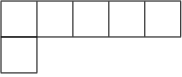
On a déjà déterminé pour $n \in \mathbb{N}^*$ quel était le nombre de représentations irréductibles de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$, leur dimension mais également leur construction explicite. Nous allons voir désormais comment obtenir les représentation de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_{n+1}$ à partir de celles de $\mathfrak{S}_n$ par récurrence et voir le lien avec les représentations induites ainsi que les restrictions. Remarquons d'abord qu'on peut pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ identifier $\mathfrak{S}_k$ à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{k+1}$ via le morphisme injectif fixant $(k+1)$. Ainsi, on peut considérer la suite croissante de groupes $(\mathfrak{S}_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Pour cela, étant donné $\lambda \in \mathcal{P}_n$ et $\mu \in \mathcal{P}_{n+1}$, on notera $\lambda \rightarrow \mu$ si μ est obtenu, via sa représentation en diagrammes de YOUNG, en ajoutant une boîte $\square$ à λ .

Exemple 2.3.1. • $n = 3, \lambda = (2, 1) \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \leftarrow \mu = (3, 1) \text{ mais}$

$$\lambda = (2, 1) \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} \leftarrow \tilde{\mu} = (1, 1, 1, 1)$$

• $n = 4, \lambda = (2, 2) \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \leftarrow \mu = (3, 2, 1) \text{ mais}$

$$\lambda = (2, 2) \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \leftarrow \tilde{\mu} = (3, 1, 1)$$

- $n = 5$, $\lambda = (3, 2) \rightsquigarrow$  $\rightarrow$  $\leftarrow \mu = (3, 3)$ mais
- $\lambda = (3, 2) \rightsquigarrow$  $\rightarrow$  $\leftarrow \tilde{\mu} = (5, 1)$

Proposition 2.3.2. On a les isomorphismes :

$$\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} V_\lambda \cong \bigoplus_{\substack{\mu \rightarrow \lambda \\ \mu \in \mathcal{P}_n}} V_\mu \quad (2.1)$$

$$\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}} V_\lambda \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \rightarrow \rho \\ \rho \in \mathcal{P}_n}} V_\rho. \quad (2.2)$$

En particulier, en notant $d_\lambda := \dim(V_\lambda)$ pour $\lambda \in \mathcal{P}_n$, on a :

$$d_\mu = \sum_{\lambda \rightarrow \mu} d_\lambda. \quad (2.3)$$

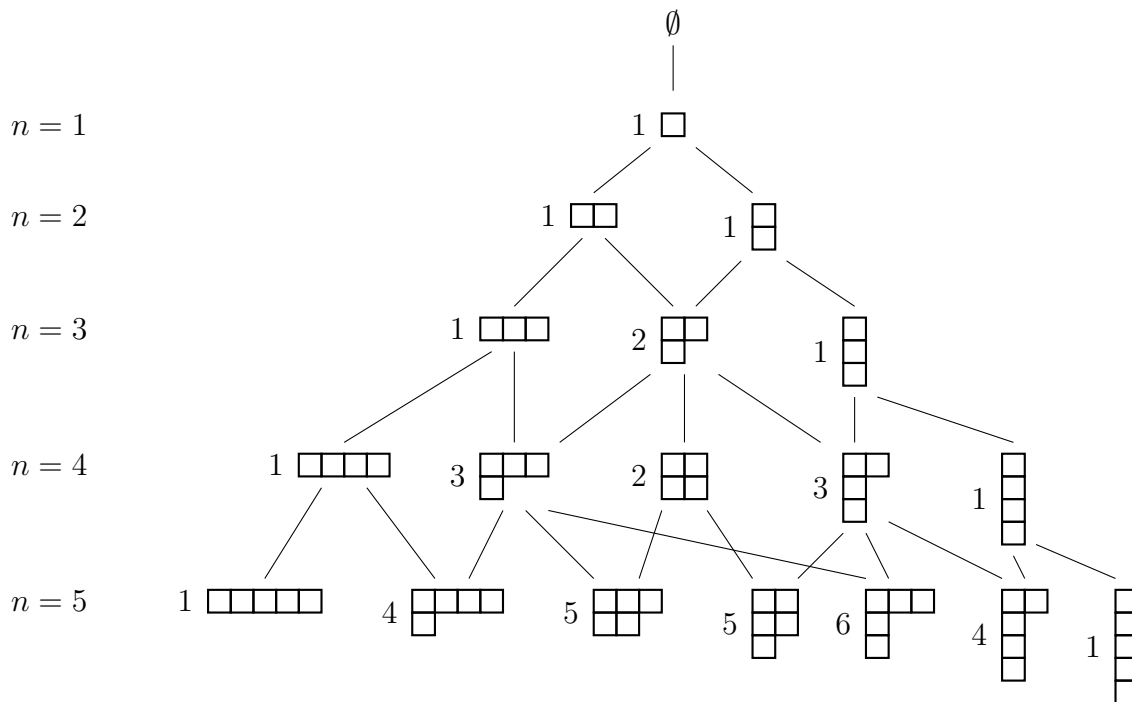
Démonstration. Cf. [GW09]. □

Remarque 2.3.3. • On connaissait déjà la dimension d'une représentation V_λ pour $\lambda \in \mathcal{P}_n$. L'égalité (2.3) permet d'éviter d'oublier certaines représentations dans la construction par récurrence du diagramme de BRATELLI.

- On verra plus tard une généralisation de la construction de ce diagramme à des suites croissantes d'algèbres semi-simples.

Exemple 2.3.4. $\text{Res}_{\mathfrak{S}_3}^{\mathfrak{S}_4} V_{(3,1)} \cong V_{(3)} \oplus V_{(2,1)}$ et $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_3}^{\mathfrak{S}_4} V_{(1,1,1)} \cong V_{(1,1,1,1)} \oplus V_{(2,1,1)}$.

On représente ci-dessous le diagramme défini précédemment pour n allant jusqu'à 5.



Les nombres à côté des partitions sont les dimensions d_λ .

Chapitre 3

La dualité de Schur-Weyl

3.1 Tenseurs symétriques et antisymétriques

On rappelle dans cette section des résultats élémentaires sur les tenseurs symétriques et antisymétriques qui seront utiles pour la suite.

On fixe V un espace vectoriel complexe de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Définition 3.1.1. • Un tenseur $t \in \bigotimes^k V$ est dit **symétrique** si pour tout $s \in \mathfrak{S}_k$, $\sigma_k(s)(t) = t$.

On note $\text{Sym}^k(V)$ le sous-espace vectoriel de $\bigotimes^k V$ des tenseurs symétriques.

• Un tenseur $t \in \bigotimes^k V$ est dit **antisymétrique** si pour tout $s \in \mathfrak{S}_k$, $\sigma_k(s)(t) = \epsilon(s)t$.

On note $\text{Ant}^k(V)$ le sous-espace vectoriel de $\bigotimes^k V$ des tenseurs antisymétriques.

Remarque 3.1.2. On a $\text{Sym}^k(V) \cap \text{Ant}^k(V) = \left\{ 0_{\bigotimes^k V} \right\}$.

Définition 3.1.3. On définit deux endomorphismes de $\bigotimes^k V$:

$$(\text{symétrisation}) \quad s_k := \frac{1}{k!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_k} \sigma_k(s) \quad (3.1)$$

$$(\text{antisymétrisation}) \quad a_k := \frac{1}{k!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_k} \epsilon(s) \sigma_k(s) \quad (3.2)$$

Proposition 3.1.4. On a $\text{Sym}^k(V) = \text{Im}(s_k)$ et $\text{Ant}^k(V) = \text{Im}(a_k)$.

Démonstration. On a évidemment $\text{Im}(s_k) \subset \text{Sym}^k(V)$ et $\text{Im}(a_k) \subset \text{Ant}^k(V)$. Enfin, il suffit de remarquer que $s_k|_{\text{Sym}^k(V)} = \text{Id}_{\text{Sym}^k(V)}$ et $a_k|_{\text{Ant}^k(V)} = \text{Id}_{\text{Ant}^k(V)}$. $\square$

Proposition 3.1.5. *On a les isomorphismes d'espaces vectoriels suivants :*

$$\text{Sym}^k(V) \cong \bigotimes_{s_k}^k V / N_k \quad (3.3)$$

$$\text{Ant}^k(V) \cong \bigotimes_{a_k}^k V / J_k \quad (3.4)$$

où $N_k = \text{Vect}\{t - \sigma_k(s)(t) \mid s \in \mathfrak{S}_k, t \in \bigotimes^k V\}$ et $J_k = \text{Vect}\{t - \epsilon(s)\sigma_k(s)(t) \mid s \in \mathfrak{S}_k, t \in \bigotimes^k V\}$.

Démonstration. Il est clair que pour $s \in \mathfrak{S}_k$ et $t \in \bigotimes^k V$, $(t - \sigma_k(s)(t)) \in \text{Ker}(s_k)$ et $(t - \epsilon(s)\sigma_k(s)(t)) \in \text{Ker}(a_k)$, d'où $N_k \subset \text{Ker}(s_k)$ et $J_k \subset \text{Ker}(a_k)$. De plus, $t = \underbrace{(Id - s_k)(t)}_{\in N_k} + s_k(t) = \underbrace{(Id - a_k)(t)}_{\in J_k} + a_k(t)$. Ainsi, $\text{Ker}(s_k) = N_k$ et $\text{Ker}(a_k) = J_k$, d'où les isomorphismes par la proposition (3.1.4). $\square$

Théorème 3.1.6. 1. $\text{Sym}^k(V)$ admet pour base $\{s_k(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n)\}$.
En particulier, $\dim(\text{Sym}^k(V)) = \binom{n+k-1}{k}$.
2. $\text{Ant}^k(V)$ admet pour base $\{a_k(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)\}$.
En particulier, $\dim(\text{Ant}^k(V)) = \binom{n}{k}$.

Démonstration. Cf. [BER10] section (2.3). $\square$

Remarque 3.1.7. • Lorsque $k > \dim(V)$, $\text{Ant}^k(V) = \left\{0_{\bigotimes^k V}\right\}$.
• $V \otimes V = \text{Ant}^2(V) \oplus \text{Sym}^2(V)$ ce qui n'est plus vrai lorsque $k \geq 3$.

La dernière remarque affirme que lorsque $k \geq 3$, on n'a plus $\bigotimes^k V \cong \text{Sym}^k(V) \oplus \text{Ant}^k(V)$; la section suivante va nous permettre de déterminer ces supplémentaires dans la décomposition de $\bigotimes^k V$.

3.2 Une première décomposition

On se référera pour les résultats classiques de cette section à [GW09],[DEF] et [CAV17].

3.2.1 Théorème du double commutant

Définition 3.2.1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Pour n'importe quelle partie $\mathcal{S} \subset \text{End}(V)$, on définit :

$$\text{Comm}(\mathcal{S}) := \{x \in \text{End}(V) \mid x \circ s = s \circ x \quad \forall s \in \mathcal{S}\}$$

qu'on appelle le **commutant** de $\mathcal{S}$.

Remarque 3.2.2. 1. Si $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \text{End}(V)$ est une représentation, alors $\text{Comm}(\rho(\mathcal{A})) = \text{End}_{\mathcal{A}}(V)$.

2. $\text{Comm}(\mathcal{S})$ est une algèbre d'unité I_V , sans que $\mathcal{S}$ en soit nécessairement une.

Proposition 3.2.3. Soient $\mathcal{A}$ une algèbre et (ρ, V) une représentation de dimension finie admettant une décomposition en somme directe de représentations irréductibles $(\rho_i, V_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$, i.e. :

$$\rho \cong \bigoplus_{i=1}^k \rho_i^{\oplus m_i} \quad \text{et} \quad V \cong \bigoplus_{i=1}^k V_i^{\oplus m_i}. \quad (3.5)$$

Alors on a un isomorphisme d'algèbres :

$$\text{End}_{\mathcal{A}}(V) \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{m_i}(\mathbb{C}). \quad (3.6)$$

Démonstration. Le résultat repose sur le lemme de SCHUR, à savoir : (μ, V) est une représentation (de dimension finie) irréductible si, et seulement si $\text{End}_{\mathcal{A}}(V) = \{\lambda \text{Id}_V \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$. Pour $i \in \{1, \dots, k\}$, on a, sur chaque composante $V_i^{\oplus m_i}$, en choisissant une base de V_i et par concaténation de ces dernières, une application :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_i : \mathcal{A} &\longrightarrow M_{m_i \dim(V_i)}(\mathbb{C}) \\ a &\longmapsto \begin{pmatrix} \rho_i(a) & 0_{M_{\dim(V_i)}(\mathbb{C})} & \cdots & 0_{M_{\dim(V_i)}(\mathbb{C})} \\ 0_{M_{\dim(V_i)}(\mathbb{C})} & \rho_i(a) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0_{M_{\dim(V_i)}(\mathbb{C})} \\ 0_{M_{\dim(V_i)}(\mathbb{C})} & \cdots & 0_{M_{\dim(V_i)}(\mathbb{C})} & \rho_i(a) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En utilisant le lemme mentionné précédemment à chaque $\rho(a_i)$ et via un simple calcul matriciel de matrices par blocs, on obtient une application :

$$\begin{aligned} \delta_i : \text{End}_{\mathcal{A}}(V) &\longrightarrow M_{m_i \dim(V_i)}(\mathbb{C}) \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x_{11}^i \text{Id}_{\dim(V_i)} & x_{12}^i \text{Id}_{\dim(V_i)} & \cdots & x_{1m_i}^i \text{Id}_{\dim(V_i)} \\ x_{21}^i \text{Id}_{\dim(V_i)} & x_{22}^i \text{Id}_{\dim(V_i)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_{m_i 1}^i \text{Id}_{\dim(V_i)} & \cdots & & x_{m_i m_i}^i \text{Id}_{\dim(V_i)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $(x_{\ell m}^i) \in \mathbb{C}^{m_i^2}$. Ceci étant pour un $i \in \{1, \dots, k\}$ arbitraire, on en déduit aisément un isomorphisme d'algèbres via la concaténation de chaque base par l'application :

$$\begin{aligned} \Psi : \text{End}_{\mathcal{A}}(V) &\xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i=1}^k M_{m_i}(\mathbb{C}) \\ x &\longmapsto ((x_{\ell m}^1), \dots, (x_{\ell m}^k)) \end{aligned}$$

□

Soit $\mathcal{A} \subset \text{End}(V)$ une algèbre semi-simple, posons $\mathcal{B} := \text{Comm}(\mathcal{A})$. L'espace vectoriel $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ peut être muni d'une structure d'algèbre via la multiplication $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ et on peut identifier $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{B}$) à la sous-algèbre $\mathcal{A} \otimes 1_{\mathcal{B}}$ (respectivement $1_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{B}$) de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. On peut alors voir de même (ρ, V) comme une représentation de $\mathcal{B}$ par la preuve qui précède (les $(x_{\ell m}^i)$, pour $i \in \{1, \dots, k\}$ fournissent une représentation U_i de dimension m_i et apparaissant $\dim(V_i)$ fois dans la décomposition de (ρ, V)). On peut ainsi voir la représentation (ρ, V) comme une représentation de $\mathcal{A}$ ou de $\mathcal{B}$, i.e. :

$$\underbrace{\bigoplus_{i=1}^k V_i^{\oplus \dim(U_i)}}_{\mathcal{A}\text{-module}} \cong V \cong \underbrace{\bigoplus_{i=1}^k U_i^{\oplus \dim(V_i)}}_{\mathcal{B}\text{-module}}$$

De plus, comme les images de chaque représentation commutent, on peut voir (ρ, V) comme une représentation de l'algèbre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ en définissant, pour $i \in \{1, \dots, k\}$, l'action :

$$\forall a \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathcal{B}, \forall u \in V_i, \forall v \in U_i, (a \otimes b) \cdot (u \otimes v) = (a \cdot u) \otimes (b \cdot v) \quad (3.7)$$

qu'on étend par linéarité à $V_i \otimes U_i$.

CONSÉQUENCE : On a, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$:

Multiplicité de V_i = Dimension de U_i .

Multiplicité de U_i = Dimension de V_i .

et

$$V \cong \underbrace{\bigoplus_{i=1}^k V_i \otimes U_i}_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}\text{-modules}} \quad (3.8)$$

En vertu de (1.5), on en déduit que $U_i = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(V_i, V)$. On rappelle qu'on a également l'isomorphisme d'algèbres :

$$\mathcal{A} \cong \bigoplus_{i=1}^r \text{End}(V_i) \otimes I_{U_i}. \quad (3.9)$$

On est en mesure d'énoncer le théorème essentiel suivant :

Théorème 3.2.4. (*Double commutant*)

L'algèbre $\mathcal{B}$ est semi-simple et $\text{Comm}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$. De plus, on a :

$$\mathcal{B} \cong \bigoplus_{i=1}^r I_{V_i} \otimes \text{End}(U_i) \quad (3.10)$$

où les $(V_i)_{i \in \{1, \dots, r\}}$ (respectivement les $(U_i)_{i \in \{1, \dots, r\}}$) désignent les $\mathcal{A}$ -modules irréductibles (respectivement les $\mathcal{B}$ -modules irréductibles) deux à deux non équivalents.

De plus, les sous-espaces $V_i \otimes U_i$ sont irréductibles et sont mutuellement non équivalentes comme représentations de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Démonstration. Cf. [GW09] section (4.1.5). □

3.2.2 La dualité de Schur-Weyl

On fixe dorénavant V un espace vectoriel complexe de dimension finie et $k \in \mathbb{N}^*$ un entier.

Définition 3.2.5. On définit deux représentations (de groupes) $(\rho_k, V^{\otimes k})$ et $(\sigma_k, V^{\otimes k})$ par :

• $\underline{\rho_k}$:

$$\begin{aligned} \rho_k : GL(V) &\longrightarrow \text{End}(V^{\otimes k}) \\ g &\longmapsto \begin{cases} V^{\otimes k} &\longrightarrow V^{\otimes k} \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_k &\longmapsto gv_1 \otimes \dots \otimes gv_k \end{cases} \end{aligned} \quad (3.11)$$

• $\underline{\sigma_k}$:

$$\begin{aligned} \sigma_k : \mathfrak{S}_k &\longrightarrow \text{End}(V^{\otimes k}) \\ s &\longmapsto \begin{cases} V^{\otimes k} &\longrightarrow V^{\otimes k} \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_k &\longmapsto v_{s^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{s^{-1}(k)} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Et on considère leur extension naturelle (et unique) (cf. (1.1)) aux algèbres de groupes que l'on notera encore ρ_k et σ_k .

Théorème 3.2.6. Notons $\mathcal{A} := \rho_k(\mathbb{C}GL(V))$, $\mathcal{B} := \sigma_k(\mathbb{C}\mathfrak{S}_k)$.
Alors $\mathcal{A} = \text{Comm}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{B} = \text{Comm}(\mathcal{A})$.

Démonstration. $\mathbb{C}\mathfrak{S}_k$ étant l'algèbre de groupe d'un groupe fini, $\mathcal{B}$ est semi-simple. Par le théorème du double commutant, il suffit de montrer que $\mathcal{A} = \text{Comm}(\mathcal{B})$.

Pour $g \in GL(V)$ et $s \in \mathfrak{S}_k$, on a $\rho_k(g) \circ \sigma_k(s) = \sigma_k(s) \circ \rho_k(g)$, d'où $\mathcal{A} \subset \text{Comm}(\mathcal{B})$.

Fixons $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de V . Pour $I = (i_1, \dots, i_k)$ un k -tuple ordonné, $1 \leq i_j \leq n$, on note $e_I := e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$, de sorte que $\Lambda := \{e_I\}_{I \subset \{1, \dots, n\}^k}$ est une base de $V^{\otimes k}$. On définit une action de groupe de $\mathfrak{S}_k$ sur Λ par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_k \times \Lambda &\longrightarrow \Lambda \\ (s, e_I := e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_n}) &\longmapsto s.e_I := e_{j_{s^{-1}(1)}} \otimes \dots \otimes e_{j_{s^{-1}(n)}} \end{aligned}$$

Pour $T \in \text{End}(V^{\otimes k})$, notons $[a_{I,J}]$ sa matrice relativement à Λ . Pour $J \subset 1, \dots, n^k$, on a :

$$Te_J = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}^k} a_{I,J} e_I$$

Pour $s \in \mathfrak{S}_k$, on a :

$$\begin{cases} T(\sigma_k(s)e_J) = \sum_I a_{I,s.J} e_I \\ \sigma_k(s)(Te_J) = \sum_I a_{I,J} e_{s.I} = \sum_I a_{s^{-1}.I,J} e_I \end{cases}$$

Ainsi, on a :

$$T \in \text{Comm}(\mathcal{B}) \iff \forall I, J \subset \{1, \dots, n\}^k, a_{s.I,s.J} = a_{I,J} (*) \quad (3.13)$$

Lemme 3.2.7. L'application φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \text{End}(V^{\otimes k}) \times \text{End}(V^{\otimes k}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (X, Y) &\longmapsto \text{Tr}(XY) \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire non dégénérée symétrique dont sa restriction à l'algèbre $\text{Comm}(\mathcal{B})$ est également non dégénérée.

Démonstration. La bilinéarité et symétrie de φ découle des propriétés élémentaire de la trace. En notant $[x_{ij}]$ la matrice de $X \in \text{End}(V^{\otimes k})$ relativement à une base de $V^{\otimes k}$ et E_{ij} la matrice élémentaire, on a $\varphi(XE_{ij}) = x_{ji}$, ce qui prouve la non dégénérescence de φ .

Pour $X \in \text{End}(V^{\otimes k})$, on note $X^\sharp := \frac{1}{k!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_k} \sigma_k(s) \circ X \circ \sigma_k(s)^{-1}$.

Pour $t \in \mathfrak{S}_k$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_k(t) \circ X^\sharp &= \frac{1}{k!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_k} \sigma_k(t) \circ \sigma_k(s) \circ X \circ \sigma_k(s)^{-1} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_k} \sigma_k(t \circ s) \circ X \circ \sigma_k(s)^{-1} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_k} \sigma_k(t \circ s) \circ X \circ \sigma_k(s)^{-1} \circ \sigma_k(t)^{-1} \circ \sigma_k(t) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_k} \sigma_k(t \circ s) \circ X \circ \sigma_k(t \circ s)^{-1} \circ \sigma_k(t) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{u \in \mathfrak{S}_k} \sigma_k(u) \circ X \circ \sigma_k(u)^{-1} \circ \sigma_k(t) \\ &= X^\sharp \circ \sigma_k(t) \end{aligned}$$

d'où $X^\sharp \in \text{Comm}(\mathcal{B})$. De plus, l'application $X \mapsto X^\sharp$ est surjective sur $\text{Comm}(\mathcal{B})$ car $X^\sharp = X$ si $X \in \text{Comm}(\mathcal{B})$.

De plus, pour $T \in \text{End}(V^{\otimes k})$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(T, X^\sharp) &= \frac{1}{k!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_k} \text{tr}(T \circ \sigma_k(s) \circ X \circ \sigma_k(s)^{-1}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_k} \text{tr}(T \circ X) \\ &= \text{tr}(T \circ X) \\ &= \varphi(T, X)\end{aligned}$$

Notons $\tilde{\varphi}$ la restriction de φ à $\text{Comm}(\mathcal{B})$. Soit $T \in \text{Comm}(\mathcal{B})$ tel que $\tilde{\varphi}(T, Y) = 0$ pour tout $Y \in \text{Comm}(\mathcal{B})$. Alors pour tout $X \in \text{End}(V^{\otimes k})$, $\varphi(T, X) = \tilde{\varphi}(T, X^\sharp) = 0$ par ce qui précède, d'où $T = 0_{\text{End}(V^{\otimes k})}$ par non dégénérescence de φ . $\square$

Conséquence du lemme : Il suffit de montrer que $\mathcal{A}^\perp := \{T \in \text{Comm}(\mathcal{B}) \mid \forall U \in \mathcal{A}, \tilde{\varphi}(T, U) = 0\} = \{0_{\text{End}(V^{\otimes k})}\}$ car on a, par non dégénérescence de $\tilde{\varphi}$, $\text{Comm}(\mathcal{B}) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp$.

Pour $g \in GL(V)$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, on a $g(e_j) = \sum_{i=1}^n g_{ij}e_i$, donc $\rho_k(g)$ a pour matrice $g_{I,J} = g_{i_1 j_1} \dots g_{i_k j_k}$. Pour $T \in \mathcal{A}^\perp$ de matrice $[a_{I,J}]$, on a donc pour tout $g \in GL(V)$:

$$\sum_{I, J \subset \{1, \dots, n\}^k} a_{I,J} g_{i_1 j_1} \dots g_{i_k j_k} = 0$$

La fonction $g \mapsto \varphi(T, \rho_k(g^t))$ est une fonction polynomiale sur $M_n(\mathbb{C})$ s'annulant sur $GL(n, \mathbb{C})$ donc nulle par densité.

On obtient ainsi :

$$\sum_{I, J \subset \{1, \dots, n\}^k} a_{I,J} x_{i_1 j_1} \dots x_{i_k j_k} = 0 \quad \forall [x_{ij}] \in M_n(\mathbb{C}) \quad (3.14)$$

Reste à voir que $((3.13) + (3.14)) \implies (a_{I,J} = 0 \quad \forall I, J \subset \{1, \dots, n\}^k)$.

On considère l'ensemble $\Omega := \{1, \dots, n\}^k \times \{1, \dots, n\}^k$. On considère l'action de groupe :

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_k \times \Omega &\longrightarrow \Omega \\ (s, (I, J)) &\longmapsto (s.I, s.J)\end{aligned}$$

D'une part, par $(*)$, $T \in \text{Comm}(\mathcal{B})$ si, et seulement si l'application $(I, J) \mapsto a_{I,J}$ est constante sur les orbites de l'action définie ci-dessus.

Soient $(I, J) = ((i_1, \dots, i_k), (j_1, \dots, j_k))$ et $(I', J') = ((i'_1, \dots, i'_k), (j'_1, \dots, j'_k))$ tels que $x_{I,J} = x_{I',J'}$. On dispose d'un $p \in \{1, \dots, k\}$ tel que $x_{i_p j'_p} = x_{i_1 j_1}$. En itérant le processus, on obtient une permutation $s \in \mathfrak{S}_k$ tel que $x_{I',J'} = x_{s.I, s.J}$. De plus, il est évident que pour tout $s \in \mathfrak{S}_k$ et pour tout $(I, J) \in \Omega$, $x_{(I,J)} = x_{(s.I, s.J)}$. Ainsi, en considérant un ensemble de représentants $\mathcal{U}$ distinct 2 à 2 sous l'action définie ci-dessus, on a que pour $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$, $x_\alpha = x_\beta \iff \alpha \neq \beta$. Notons enfin, pour $\alpha \in \mathcal{U}$, $\eta_\alpha := \text{Card}(\mathfrak{S}_k \cdot \alpha)$. D'autre part, par $(**)$, on a :

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{U}} \eta_\alpha a_\alpha x_\alpha = 0$$

Mais comme les $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{U}}$ sont linéairement indépendants (car tous différents), on a que $a_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{U}$, i.e. $T = 0_{\text{End}(V^{\otimes k})}$. On a donc finalement $\mathcal{A}^\perp = \{0_{\text{End}(V^{\otimes k})}\}$. $\square$

Corollaire 3.2.8. Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe des $GL(V)$ -modules irréductibles deux à deux non équivalents $(F_i)_{i \in \{1, \dots, d\}}$ et des $\mathfrak{S}_k$ -modules irréductibles deux à deux non équivalents $(E_i)_{i \in \{1, \dots, d\}}$ tels que :

$$\bigotimes^k V \cong \bigoplus_{i=1}^d F_i \otimes E_i \quad (3.15)$$

comme $\rho_k(\mathbb{C}GL(V)) \otimes \sigma_k(\mathbb{C}\mathfrak{S}_k)$ -modules.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la décomposition (3.8) aux algèbres $\mathcal{A} := \rho_k(\mathbb{C}GL(V))$ et $\mathcal{B} := \sigma_k(\mathbb{C}\mathfrak{S}_k)$. $\square$

3.2.3 Construction de Weyl

Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$. On a déjà montré la semi-simplicité de $\bigotimes^k V$, V étant un espace vectoriel (complexe) de dimension n , comme représentation de $GL(V)$ définie en (3.11). Rappelons que, pour une partition λ de k , on a une application linéaire $c_\lambda \in \text{End}(\bigotimes^k V)$ définie par l'idéal à gauche $\mathbb{C}\mathfrak{S}_k \cdot c_\lambda$ sous l'action définie en (3.12). L'objectif de cette section est de construire les représentations irréductibles de $GL(V)$ apparaissant dans (3.15).

Définition 3.2.9. On pose $\mathbb{S}_\lambda(V) := \text{Im} \left(c_\lambda \mid \bigotimes^k V \right)$. On définit le **foncteur de Schur** par

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_\lambda : \text{Vect}_{\mathbb{C}} &\longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{C}} \\ V &\longmapsto \mathbb{S}_\lambda(V) \end{aligned}$$

où $\text{Vect}_{\mathbb{C}}$ désigne l'ensemble des espaces vectoriels complexes.

Proposition 3.2.10. Les $(\mathbb{S}_\lambda(V))_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$ sont ou bien nulles, ou bien des représentations irréductibles de $GL(V)$. De plus, on a :

$$\bigotimes^k V \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} \mathbb{S}_\lambda(V)^{\oplus m_\lambda} \quad (3.16)$$

où $m_\lambda := \text{Card}(STab(\lambda))$.

Démonstration. Cf. [CAV17] section (3.2). $\square$

Exemple 3.2.11. — $k = 2$, V espace vectoriel complexe de dimension deux, $\{e_1, e_2\}$ base de V .

- $\lambda = (2)$, $T_1 = \boxed{1 \ 2}$, $c_{T_1} = \delta_{Id_{\mathfrak{S}_2}} + \delta_{(1,2)} \rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda(V) = \text{Sym}^2(V)$.

- $\lambda = (1, 1)$, $T_2 = \boxed{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}}$, $c_{T_2} = \delta_{Id_{\mathfrak{S}_2}} - \delta_{(1,2)} \rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda(V) = \text{Ant}^2(V)$.

d'où $V \otimes V \cong \underbrace{\text{Sym}^2(V)}_{\dim=3} \oplus \underbrace{\text{Ant}^2(V)}_{\dim=1}$

— $k = 3$, V espace vectoriel complexe de dimension deux, $\{e_1, e_2\}$ une base de V .

- $\lambda = (3)$, $T_1 = \boxed{1 \ 2 \ 3}$, $c_{T_1} = \delta_{Id_{\mathfrak{S}_3}} + \delta_{(1,2)} + \delta_{(1,3)} + \delta_{(2,3)} + \delta_{(1,2,3)} + \delta_{(1,3,2)} \rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda(V) = \text{Sym}^3(V)$.

- $\lambda = (1, 1, 1)$, $T_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $c_{T_2} = \delta_{Id_{\mathfrak{S}_3}} - \delta_{(1,2)} - \delta_{(1,3)} - \delta_{(2,3)} + \delta_{(1,2,3)} + \delta_{(1,3,2)} \rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda(V) = \text{Ant}^3(V) = \left\{ 0 \underset{\otimes V}{\underset{3}{\otimes}} \right\}$.

- $\lambda = (2, 1)$, $T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $c_\lambda = \delta_{Id_{\mathfrak{S}_3}} - \delta_{(1,3)} + \delta_{(1,2)} - \delta_{(1,3,2)} \rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda(V) = \text{Vect}\{e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_1 \otimes e_2, e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_2 \otimes e_1\}$.

d'où $\underset{\otimes V}{\underset{3}{\otimes}} \cong \underbrace{\text{Sym}^3(V)}_{\dim=4} \oplus \underbrace{\mathbb{S}_{(2,1)}(V)}_{\dim=2}^{\oplus 2}$.

Vérifions que $\mathbb{S}_\lambda(V)$ est bien un $\mathbb{C}GL(V)$ -module. Considérons $g \in GL(V)$ et soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sa matrice relativement à la base de V $\{e_1, e_2\}$. Alors on a $\rho_3(g)(e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_1 \otimes e_2) = (a^2d - abc)(e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 \otimes e_1) + (bc^2 - acd)(e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_2) \in \mathbb{S}_\lambda(V)$ et $\rho_3(g)(e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_2 \otimes e_1) = (b^2c - abd)(e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_1 \otimes e_2) + (ad^2 - bcd)(e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_2 \otimes e_1) \in \mathbb{S}_\lambda(V)$ d'où le résultat.

Considérons maintenant $\tilde{T} := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, alors $c_{\tilde{T}} = \delta_{Id_{\mathfrak{S}_3}} - \delta_{(1,2)} + \delta_{(1,3)} - \delta_{(123)}$. Notons

$\tilde{\mathbb{S}}_\lambda(V) := \underset{\otimes V}{\underset{k}{\otimes}} c_{\tilde{T}}$. On vérifie facilement que $\tilde{\mathbb{S}}_\lambda(V) = \text{Vect}\{e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_2\}$.

On considère l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & \mathbb{S}_\lambda(V) & \longrightarrow \tilde{\mathbb{S}}_\lambda(V) \\ & e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 & \longmapsto e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 \\ & e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 & \longmapsto e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 \end{array}$$

Il est clair que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. De plus, on vérifie aisément que $\rho_3(g)(e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 \otimes e_1) = (a^2d - abc)(e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 \otimes e_1) + (bc^2 - acd)(e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_2) = \varphi(\rho_3(g)(e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_1 \otimes e_2))$ et $\rho_3(g)(e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_2) = (b^2c - abd)(e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_1 \otimes e_2) + (ad^2 - bcd)(e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_2 \otimes e_1) = \varphi(\rho_3(g)(e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_2 \otimes e_1))$. Ainsi, on a bien un isomorphisme de représentations $\mathbb{S}_\lambda(V) \overset{\varphi}{\cong} \tilde{\mathbb{S}}_\lambda(V)$.

— $k = 3$, V un espace vectoriel complexe de dimension trois, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de V .

- $\lambda = (3)$, $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $c_{T_1} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \delta_\sigma \rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda(V) = \text{Sym}^3(V)$.

- $\lambda = (1, 1, 1)$, $T_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $c_{T_2} = \delta_{Id_{\mathfrak{S}_3}} - \delta_{(1,2)} - \delta_{(1,3)} - \delta_{(2,3)} + \delta_{(1,2,3)} + \delta_{(1,3,2)} \rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda(V) = \text{Ant}^3(V)$.

- $\lambda = (2, 1)$, $T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $c_\lambda = \delta_{Id_{\mathfrak{S}_3}} - \delta_{(1,3)} + \delta_{(1,2)} - \delta_{(1,3,2)} \rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda(V) = \text{Vect}\{e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_3 - e_2 \otimes e_3 \otimes e_1, e_1 \otimes e_3 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_1 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_2 \otimes e_1, 2e_i \otimes e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i \otimes e_i - e_i \otimes e_j \otimes e_i, i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j\}$. d'où $\underset{\otimes V}{\underset{3}{\otimes}} \cong \underbrace{\text{Sym}^3(V)}_{\dim=10} \oplus \underbrace{\mathbb{S}_{(2,1)}(V)}_{\dim=8}^{\oplus 2} \oplus \underbrace{\text{Ant}^3(V)}_{\dim=1}$.

On rappelle que les $(V_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$ désignent les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_k$. On arrive à l'un des résultats centraux de ce mémoire.

Théorème 3.2.12. (Dualité de Schur-Weyl) Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors on a une décomposition en $\mathfrak{S}_k \times GL(V)$ -représentations irréductibles de $\bigotimes^k V$ comme suit :

$$\bigotimes^k V = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathcal{P}_k \\ \ell(\lambda) \leq \dim(V)}} V_\lambda \otimes \mathbb{S}_\lambda(V) \quad (3.17)$$

Démonstration. On a déjà vu la décomposition. Voyons désormais qu'on peut se limiter aux partitions de k de longueur au plus égale à la dimension de V . Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ une partition de k . Pour $j \in \{1, \dots, \lambda_1\}$, on note C_j le sous-groupe de $\mathfrak{S}_k$ préservant la j -ième colonne de T et n_j le nombre d'entrées dans la j -ième colonne. Alors on a $C(T) = C_1 \dots C_{\lambda_1}$ et $\bigotimes^k V = \bigotimes_{i=1}^{\lambda_1} \left(\bigotimes^{n_i} V \right)$. On se donne un tenseur pur $v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_n}$ tel que pour tout $p \in \{2, \dots, \ell\}$, les indices de la $\sum_{i=1}^{p-1} n_i$ -ième position à la $\sum_{i=1}^p n_i$ -ième position sont dans la p -ième colonne. Pour $s = s_1 \dots s_{\lambda_1}$, où $s_t \in C_t$ pour $t \in \{1, \dots, \lambda_1\}$. On a :

$$\sigma_k(s) \left(\bigotimes^{n_1} V \otimes \dots \otimes \bigotimes^{n_{\lambda_1}} V \right) = \sigma_k(s) \left(\bigotimes^{n_1} V \right) \otimes \dots \otimes \sigma_k(s) \left(\bigotimes^{n_{\lambda_1}} V \right)$$

et donc

$$\sigma(b_T) \left(\bigotimes^{n_1} V \otimes \dots \otimes \bigotimes^{n_{\lambda_1}} V \right) = \text{Ant}^{n_1}(V) \otimes \dots \otimes \text{Ant}^{n_{\lambda_1}}(V)$$

Or $\ell = n_1$ donc si $\ell > n$, $\text{Ant}^\ell(V) = \left\{ 0_{\bigotimes^k V} \right\}$ et donc $\sigma_k(b_T) \left(\bigotimes^k V \right) = \left\{ 0_{\bigotimes^k V} \right\}$ mais alors $\mathbb{S}_\lambda(V) = \sigma_k(c_\lambda) \left(\bigotimes^k V \right) = \left\{ 0_{\bigotimes^k V} \right\}$.

Enfin, on admet que $\mathbb{S}_\lambda(V) \neq \left\{ 0_{\bigotimes^k V} \right\}$ lorsque $\ell(\lambda) \leq \dim(V)$, cf. [GW09] section (9.1.1). $\square$

On a donc vu la décomposition de $\bigotimes^k V$ en $\mathfrak{S}_k \times GL(V)$ -représentations irréductibles avec, en plus, des détails sur ces dernières intervenant dans la décomposition en fonction de la longueur des partitions de k . On aimerait désormais trouver une extension de cette dualité. Pour cela, on va construire une représentation d'une algèbre généralisant celle du groupe symétrique sur un espace vectoriel qui va être également modifié puis déterminer son commutant. C'est tout l'enjeu du chapitre suivant.

Chapitre 4

Algèbres de Hecke fusionnées

On se référera essentiellement dans ce chapitre à [PdA23] et [CPdA22].

4.1 Généralisation de l'algèbre du groupe des permutations

4.1.1 Algèbres des permutations fusionnées

Définition 4.1.1. On appelle **multiensemble** la donnée d'une paire (E, m) où E est un ensemble et $m : E \rightarrow \mathbb{N}^*$ une application tels tout élément $e \in E$ apparaît $m(e)$ fois.

Notation 4.1.2. Un multiensemble (fini) se note en utilisant des accolades doubles encadrant les éléments.

Exemple 4.1.3. Considérons $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $m(1) = 1$, $m(2) = 2$, $m(3) = 1$, $m(4) = 3$, alors on note $\{\{4, 4, 3, 4, 1, 2, 1\}\}$.

Remarque 4.1.4. • Un ensemble est un multiensemble (E, m) où $m(e) = 1$ pour tout élément e de E ; il s'agit donc d'une généralisation de la notion d'ensemble.
• Il s'agit d'une liste commutative, i.e., l'ordre d'apparition des éléments entre les doubles accolades ne compte pas.

Définition 4.1.5. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\underline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, on dit qu'un élément $(S_1, \dots, S_n)$ appartient à $S_{\underline{k}, n}$ si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Les } \{S_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}} \text{ sont des multiset de } \{1, \dots, n\}. \\ S_i \text{ contient } k_i \text{ éléments, } i \in \{1, \dots, n\}. \\ \text{L'élément } i \text{ apparaît } k_i \text{ fois parmi tous les } S_j, j \in \{1, \dots, n\}. \end{array} \right.$$

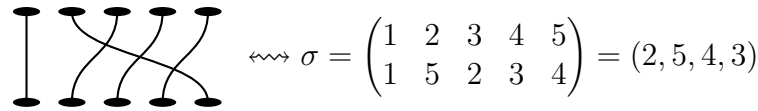
L'ensemble des éléments de $S_{\underline{k}, n}$ s'appelle l'ensemble des permutations fusionnées.

Remarque 4.1.6. Cette définition ensembliste, bien que nécessaire, est assez compliquée. Cependant, essayons de voir ces objets de façon plus géométrique. On fixe deux lignes horizontales de n points, une au-dessus de l'autre. On connecte les points de la ligne du dessus à ceux de la ligne du bas. La définition impose cette condition : Pour tout $a \in \{1, \dots, n\}$, il y a k_a arêtes qui partent du a -ième point du haut et il y a de même k_a arêtes qui arrivent au a -ième point du bas. On remarque qu'on a ainsi $\sum_{i=1}^n k_i$ arêtes.

La seule information qui importe ici est donc : quels points sont connectés et auxquels. Le multiensemble de la définition correspond exactement pour chaque $a \in \{1, \dots, n\}$ aux points de la ligne du bas atteint. Prenons le temps d'illustrer cela sur plusieurs exemples afin de bien assimiler la définition.

Exemple 4.1.7. • $n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{k} = (1, 1, \dots, 1)$. On peut identifier aisément une permutation fusionnée à une permutation à n éléments par la condition qui est imposée : On doit connecter chaque point de la ligne du haut avec un unique point de la ligne du bas. $S_{\underline{k}, n}$ est donc bien une généralisation de $\mathfrak{S}_n$.

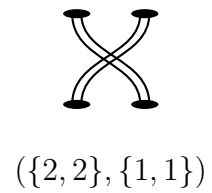
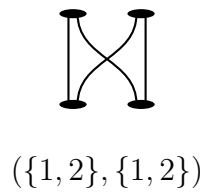
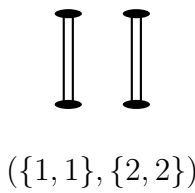
Par exemple, pour $n = 5$:



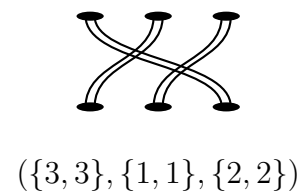
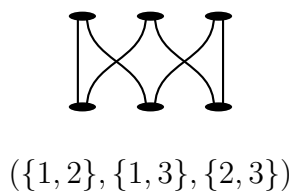
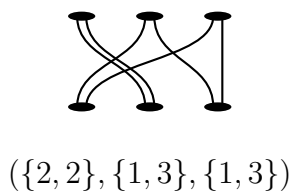
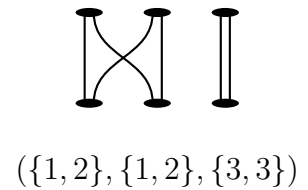
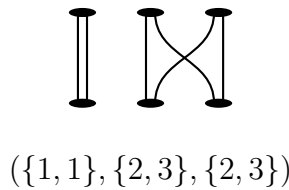
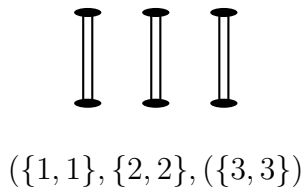
• $n = 3$, $\underline{k} = (2, 1, 1)$. $\text{Card}(S_{\underline{k}, n}) = 6$. En voici une :



• $n = 2$, $\underline{k} = (2, 2)$. $\text{Card}(S_{\underline{k}, n}) = 3$. Voici les trois :



• $n = 3$, $\underline{k} = (2, 2, 2)$. $\text{Card}(S_{\underline{k}, n}) = 21$. Voici six d'entre elles :



Proposition 4.1.8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $S_{\underline{k}, n}$ est un ensemble fini.

Démonstration. On majore grossièrement le cardinal de $S_{\underline{k}, n}$. Pour cela, il suffit de remarquer qu'on a n^p choix pour un élément de $\{1, \dots, n\}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$. De ce fait, on dispose de $n^{\sum_{i=1}^n k_i}$ choix pour élément de $\{1, \dots, n\}^{\sum_{i=1}^n k_i}$. Comme on impose une condition supplémentaire sur les $(S_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$, le cardinal de $S_{\underline{k}, n}$ est majoré par $n^{\sum_{i=1}^n k_i}$, donc fini. $\square$

On va désormais, à partir de l'ensemble $S_{\underline{k},n}$, définir une algèbre avec comme espace vectoriel sous-jacent l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ avec comme base une base indexée par $S_{\underline{k},n}$. Reste à définir une multiplication (associative et unitale) sur cette base afin de la munir d'une structure d'algèbre.

Définition 4.1.9. Soient $d, d' \in S_{\underline{k},n}$ qu'on identifiera à leur diagramme correspondant. On procède en trois étapes :

- Concaténation : On place les diagrammes de d au-dessus du diagramme de d' en identifiant la ligne du bas de d avec la ligne du haut de d' .
- Élimination des points du milieu : Pour tout $a \in \{1, \dots, n\}$, il y a k_a arêtes arrivant et k_a arêtes partant du a -ième point de la ligne du milieu. On enlève alors le a -ième point de cette ligne du milieu et on somme sur toutes les possibilités en connectant les k_a arêtes arrivant aux k_a arêtes partant de ce point. (il y a donc $k_a!$ possibilités au a -ième point).
- Normalisation : On divise le résultat obtenu par $\prod_{i=1}^n k_i!$.

Notation 4.1.10. • La multiplication sera notée par $\cdot$.

- On notera $(H_{\underline{k},n}(1), +, \cdot)$ l'algèbre munie du produit $\cdot$.

Définition 4.1.11. L'algèbre $(H_{\underline{k},n}(1), +, \cdot)$ définie ci-dessus est appelée l'**algèbre des permutations fusionnées**.

Remarque 4.1.12. • La multiplication $\cdot$ est associative.

- C'est une algèbre unitaire : en effet, $1_{H_{\underline{k},n}(1)} := (\underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{k_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\{n, \dots, n\}}_{k_n \text{ fois}})$.
- $H_{\underline{k},n}(1)$ est une algèbre sur $\mathbb{C}$ de dimension finie par (4.1.8).

Exemple 4.1.13.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} = (1, 1, \dots, 1)$, alors l'algèbre $H_{\underline{k},n}(1)$ coïncide avec $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$.
- $n = 2$, $\underline{k} = (2, 2)$, voyons un exemple détaillé d'un produit de deux éléments de $H_{\underline{k},2}(1)$:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} \cdot \text{Diagram 2} &= \text{Diagram 3} = \frac{1}{4} \left(\text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\text{Diagram 8} + \text{Diagram 9} + \frac{1}{2} \text{Diagram 10} + \frac{1}{4} \text{Diagram 11} \right)
 \end{aligned}$$

On peut via un peu de calculs construire un isomorphisme d'algèbres et obtenir pour certains cas (faciles) des présentations par générateurs et relations de $H_{\underline{k},n}(1)$.

Proposition 4.1.14. *On a les isomorphismes d'algèbres suivants :*

$$H_{(1,2),2}(1) \cong \mathbb{C}[X] / \left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} \right) \cong \mathbb{C}^{\oplus 2} \quad (4.1)$$

$$H_{(2,2),2}(1) \cong \mathbb{C}[X] / \left(X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X \right) \cong \mathbb{C}^{\oplus 3} \quad (4.2)$$

$$H_{(2,3),2}(1) \cong \mathbb{C}[X] / \left(X^3 - \frac{15}{17}X^2 - \frac{2}{9}X + \frac{11}{216} \right) \cong \mathbb{C}^{\oplus 3} \quad (4.3)$$

$$H_{(1,3),2}(1) \cong \mathbb{C}[X] / \left(X^2 - \frac{2}{3}X - \frac{1}{3} \right) \cong \mathbb{C}^{\oplus 2} \quad (4.4)$$

Démonstration. On fait la preuve pour $H_{(2,2),2}(1)$, les autres isomorphismes d'algèbres se réalisant de façon analogue. On effectue les produits des trois élément de $S_{(2,2),2}$.

Ainsi, en posant :

$$\tilde{X} := \text{diagram of two crossings} \quad \text{et} \quad \tilde{Y} := \text{diagram of two crossings with different orientation}$$

On a les relations :

$$\begin{cases} \tilde{X}^2 = \frac{1}{4}1_{H_{(2,2),2}(1)} + \frac{1}{2}\tilde{X} + \frac{1}{4}\tilde{Y} \\ \tilde{Y}^2 = 1_{H_{(2,2),2}(1)} \\ \tilde{X}\tilde{Y} = \tilde{Y}\tilde{X} = \tilde{X} \end{cases}$$

Ainsi $\tilde{Y} = 4\tilde{X}^2 - 2\tilde{X} - 1_{H_{(2,2),2}(1)}$. Les relations précédentes nous montrent que $H_{(2,2),2}(1)$ est linéairement engendré par $1, \tilde{X}$ et $\tilde{X}^2$. De plus, $\tilde{X}^3 = \frac{1}{2}\tilde{X}^2 + \frac{1}{2}\tilde{X}$. Ainsi on a l'isomorphisme d'algèbres suivant :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] / \left(X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X \right) & \xrightarrow{\cong} & H_{(2,2),2}(1) \\ X & \mapsto & \tilde{X} \end{array}$$

Pour le deuxième isomorphisme, il suffit de remarquer que le polynôme $P(X) := X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$ est un polynôme ayant trois racines complexes distinctes x_1, x_2 et $x_3 \in \mathbb{C}$. Mais alors en vertu du lemme chinois, il vient :

$$\mathbb{C}[X] / P(X) \cong \mathbb{C}[X] / (X - x_1) \oplus \mathbb{C}[X] / (X - x_2) \oplus \mathbb{C}[X] / (X - x_3) \cong \mathbb{C}^{\oplus 3}$$

□

Remarque 4.1.15. On remarque que pour ces premiers cas où les calculs ne sont pas trop nombreux, on a une décomposition de type ARTIN-WEDDERBURN sans savoir si ces algèbres, bien qu'unitaires et associatives, sont semi-simples. Mais c'est bien le cas.

Théorème 4.1.16. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} \in (\mathbb{N}^*)^n$, l'algèbre $(H_{\underline{k},n}(1), +, \cdot)$ est semi-simple.

Démonstration. Cf. [CPdA22]. □

Définition 4.1.17. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} := (k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on définit :

$$P_{k_i} := \frac{1}{k_i!} \sum_{\omega \in \mathfrak{S}_{k_i}} \delta_\omega \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_{k_i}$$

et

$$P_{\underline{k},n} := \bigotimes_{i=1}^n P_{k_i} \in \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}\mathfrak{S}_{k_i}.$$

Proposition 4.1.18. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} := (k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, le produit direct de groupes $\prod_{i=1}^n \mathfrak{S}_{k_i}$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{\sum_{i=1}^n k_i}$.

Démonstration. On considère l'application φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & \prod_{i=1}^n \mathfrak{S}_{k_i} \longrightarrow \mathfrak{S}_{\sum_{i=1}^n k_i} \\ & (Id_{\mathfrak{S}_{k_1}}, \dots, Id_{\mathfrak{S}_{k_{j-1}}}, (i_{k_j}, i_{k_j} + 1), Id_{\mathfrak{S}_{k_{j+1}}}, \dots, Id_{\mathfrak{S}_{k_n}}) \longmapsto \tau_{i_{k_j}}^j \end{aligned}$$

où, pour $j \in \{2, \dots, n\}$, $i_{k_j} \in \{1, \dots, k_j\}$

$$\begin{cases} \tau_{i_{k_1}}^1 & := (i_{k_1}, i_{k_1} + 1) \\ \tau_{i_{k_\ell}}^\ell & := (\sum_{i=1}^{\ell-1} k_i + i_{k_\ell}, \sum_{i=1}^{\ell-1} k_i + i_{k_\ell} + 1) \end{cases}$$

L'application est clairement bien définie et est un morphisme de groupes : en effet, pour $u \neq v \in \{1, \dots, n\}$, $\text{Supp}(\tau_{i_{k_u}}^u) \cap \text{Supp}(\tau_{i_{k_v}}^v) = \emptyset$. Enfin, cette application est injective : en effet, si $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \prod_{i=1}^n \mathfrak{S}_{k_i}$ vérifie $\varphi((\sigma_1, \dots, \sigma_n)) = Id_{\mathfrak{S}_{\sum_{i=1}^n k_i}}$, les intersections des supports des images des $(Id_{\mathfrak{S}_{k_1}}, \dots, Id_{\mathfrak{S}_{k_{\ell-1}}}, \sigma_\ell, Id_{\mathfrak{S}_{k_{\ell+1}}}, \dots, Id_{\mathfrak{S}_{k_n}})$ par φ sont vides. Par conséquent, on a nécessairement $\sigma_\ell = Id_{\mathfrak{S}_{k_\ell}}$ pour tout $\ell \in \{1, \dots, n\}$, donc le noyau de φ est trivial. On en déduit l'isomorphisme de groupes :

$$\prod_{i=1}^n \mathfrak{S}_{k_i} \stackrel{\varphi}{\cong} \underbrace{\varphi \left(\prod_{i=1}^n \mathfrak{S}_{k_i} \right)}_{\text{sous-groupe de } \mathfrak{S}_{\sum_{i=1}^n k_i}}$$

□

Proposition 4.1.19. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} := (k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, l'algèbre $\bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}\mathfrak{S}_{k_i}$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_{\sum_{i=1}^n k_i}$.

Démonstration. La preuve est analogue à la proposition qui précède en remarquant qu'on a un isomorphisme d'algèbres $\mathbb{C} \left(\prod_{i=1}^n \mathfrak{S}_{k_i} \right) \cong \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}\mathfrak{S}_{k_i}$. □

Remarque 4.1.20. • On identifiera $P_{\underline{k},n}$ à un élément de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_{\sum_{i=1}^n k_i}$ par la suite.
 • On a $P_{\underline{k},n} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{k_i!} \sum_{\omega \in \prod_{i=1}^n \mathfrak{S}_{k_i}} \delta_\omega$ via l'identification faite ci-dessus.

Proposition 4.1.21. Soient $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ une algèbre (unitaire et associative) et $x \in \mathcal{A}$ un idempotent de $\mathcal{A}$ (i.e. $x \cdot x = x$). Alors :

1. $x \cdot \mathcal{A} \cdot x$ est une algèbre, d'unité x .
2. Pour toute représentation (ρ, V) de $\mathcal{A}$, $(\rho, \rho(x)(V))$ est une représentation de $x \cdot \mathcal{A} \cdot x$.
3. Si les $(V_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ désignent un système complet de représentations irréductibles de $\mathcal{A}$, les $(\rho(x)(V_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ forment un système complet de représentations irréductibles de $x \cdot \mathcal{A} \cdot x$ (en enlevant les représentations nulles).

Démonstration. 1. Il est clair que $x \cdot \mathcal{A} \cdot x$ est une algèbre. De plus, $x = x \cdot 1_{\mathcal{A}} \cdot x \in x \cdot \mathcal{A} \cdot x$ et pour tout $a \in \mathcal{A}$, par l'idempotence de $x \in \mathcal{A}$, on a $(x \cdot a \cdot x) \cdot x = x \cdot a \cdot x = x \cdot (x \cdot a \cdot x)$.
 2. L'application définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} : x \cdot \mathcal{A} \cdot x &\longrightarrow \text{End}(\rho(x)(V)) \\ x \cdot a \cdot x &\longmapsto \begin{cases} \rho(x)(V) &\longmapsto \rho(x)(V) \\ \rho(x)(v) &\longmapsto \rho(x \cdot a \cdot x)(\rho(x)(v)) \end{cases} \end{aligned}$$

C'est bien défini puisque pour $v \in V$ et $a \in \mathcal{A}$, $\rho(x \cdot a \cdot x)(\rho(x)(v)) = \rho(x)(\underbrace{\rho(a \cdot x)(v)}_{\in V}) \in \rho(x)(V)$ et il s'agit clairement d'un endomorphisme de $\rho(x)(V)$. On vérifie facilement que $\tilde{\rho}$ est un morphisme d'algèbres, d'où le résultat.

3. Admis, cf. [GRE80]. □

Définition 4.1.22. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. On définit l'algèbre $\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1) := P_{\underline{k},n} \cdot \mathbb{C}\mathfrak{S}_{\sum_{i=1}^n k_i} \cdot P_{\underline{k},n}$.

Remarque 4.1.23. $P_{\underline{k},n}$ étant un idempotent, on connaît donc les représentations irréductibles (à isomorphisme près) de l'algèbre $\mathcal{H}_{\underline{k},n}$.

Proposition 4.1.24. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} \in (\mathbb{N}^*)^n$, les algèbres $\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1)$ et $H_{\underline{k},n}(1)$ sont isomorphes.

Démonstration. Cf. [CPdA22]. □

4.1.2 Extension de la dualité de Schur-Weyl

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} = (k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. Enfin, posons $N := \sum_{i=1}^n k_i$.

On rappelle qu'on dispose d'une représentation $\left(\sigma_N, \bigotimes^N V\right)$ de l'algèbre du groupe symétrique $\mathfrak{S}_N$. Par la proposition (4.1.21), $P_{\underline{k},n} \left(\bigotimes^N V\right)$ devient une représentation de $\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1)$. Or, par définition de $P_{\underline{k},n}$, on a :

$$\begin{aligned} P_{\underline{k},n} \left(\bigotimes^N V\right) &= \bigotimes_{i=1}^n P_{k_i} \left(\bigotimes^{k_i} V\right) \\ &= \bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V) \end{aligned}$$

par la proposition (3.1.4). Finalement, on a une représentation $\left(\sigma_{\underline{k},n}, \bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V)\right)$.

Par ailleurs, ce même espace vectoriel est également une représentation de $GL(V)$ comme produit tensoriel de telles représentations. Par extension à l'algèbre du groupe linéaire, on obtient ainsi une représentation $\left(\rho_{\underline{k},n}, \bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V)\right)$. On a ainsi les actions des différentes algèbres :

$$\mathbb{C}\mathfrak{S}_N \xrightarrow{\sigma_{\underline{k},n}} \text{End}\left(\bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V)\right) \xleftarrow{\rho_{\underline{k},n}} \mathbb{C}GL(V) \quad (4.5)$$

Théorème 4.1.25. *On a les égalités suivantes :*

$$\text{Comm}(\rho_{\underline{k},n}(\mathbb{C}GL(V))) = \sigma_{\underline{k},n}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_N) \text{ et } \text{Comm}(\sigma_{\underline{k},n}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_N)) = \rho_{\underline{k},n}(\mathbb{C}GL(V)).$$

Démonstration. Cf. [CPdA22]. □

4.1.3 Décomposition de la représentation

Le dernier théorème nous permet de trouver, par la décomposition (3.8), une décomposition de l'espace $\bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V)$. Ceci est résumé dans le corollaire suivant :

Corollaire 4.1.26. *On a une décomposition de $\bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V)$ en $\mathbb{C}GL(V) \otimes H_{\underline{k},n}(1)$ modules irréductibles :*

$$\bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V) \cong \bigoplus_{i \in I} U_i \otimes V_i \quad (4.6)$$

où I est un ensemble fini.

Intéressons-nous maintenant aux représentations de $H_{\underline{k},n}(1)$. Pour cela, on a besoin d'introduire des objets qui vont avoir un lien avec les représentations irréductibles de $H_{\underline{k},n}(1)$.

Définition 4.1.27. *Soient $n, \ell \in \mathbb{N}^*$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_\ell)$ une composition de ℓ et λ une partition de n . Alors on définit :*

- L'ensemble des tableaux de YOUNG semi-standards de forme λ et de poids ν par :

$$SSTab(\lambda, \nu) := \{\mathbf{T} \in SSTab(\lambda) \mid \text{Card}(f^{-1}(\{i\})) = \nu_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

où $f : D_\lambda \longrightarrow \mathbb{N}^*$ est l'application associée au tableau $\mathbf{T}$.

- Le nombre de **Kostka** associé à une partition λ et une composition de n par :

$$K_{\lambda, \nu} := \text{Card}(SSTab(\lambda, \nu))$$

Exemple 4.1.28. • Pour $n = \ell \in \mathbb{N}^*$, $\nu = (1, 1, \dots, 1)$ et $\lambda = (\ell)$, on a un seul tableau de YOUNG semi-standard de cette forme possible : $\mathbf{T} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \ell \end{bmatrix}$.

- Pour $n = \ell \in \mathbb{N}^*$, $\lambda = \nu = (1, 1, \dots, 1)$, on a un seul tableau de YOUNG semi-standard

possible : $\mathbf{T} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \ell \end{bmatrix}$.

- Pour $n = \ell = 4$, $\nu = (2, 2)$ et $\lambda = (3, 1)$, on a un seul tableau de YOUNG de forme λ et de poids ν : $\mathbf{T} := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$.

Définition 4.1.29. Pour deux partitions $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_\ell)$ de même taille (au sens élargi d'une partition), on définit une relation d'ordre par :

$$\lambda \geq \mu \iff \sum_{i=1}^j \lambda_i \geq \sum_{i=1}^j \mu_i \quad \forall j \in \{1, \dots, \ell\}. \quad (4.7)$$

On appelle cette relation d'ordre l'**ordre de domination sur les partitions**.

- Exemple 4.1.30.**
- $\lambda = (2, 1, 1)$, $\mu = (3)$, ces deux éléments ne sont pas comparables $\rightsquigarrow$ l'ordre n'est pas total. Ici, on identifie μ avec le triplet $(3, 0, 0)$ (sens élargi d'une partition).
 - $\lambda = (2, 2, 2, 2)$, $\mu = (3, 3, 1, 1)$, alors $\mu \geq \lambda$.

Proposition 4.1.31. Le nombre de KOSTKA associé à une partition λ et une composition ν ne dépend pas de l'ordre sur les parties de ν .

Démonstration. Cf. [STA2] chapitre 6. □

Notation 4.1.32. Pour un n -uplet $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$, on notera ν^{ord} le n -uplet possédant les mêmes composantes que ν rangées dans l'ordre décroissant.

Exemple 4.1.33. Pour $\mu = (7, 12, 6, 7, 8)$ et $\nu = (4, 2, 7, 1)$, on a $\mu^{ord} = (12, 8, 7, 7, 6)$ et $\nu^{ord} = (7, 4, 2, 1)$.

Corollaire 4.1.34. On a l'équivalence :

$$K_{\lambda, \nu} \neq 0 \iff \lambda \geq \nu^{ord}.$$

Démonstration. Cf. [STA2]. □

On est désormais capables d'énoncer un théorème important sur les représentations irréductibles de $\mathcal{H}_{\underline{k}, n}(1)$, permettant d'avoir une idée de leur nombre ainsi leur dimension.

Notons $N := \sum_{i=1}^n k_i$.

Théorème 4.1.35. Les représentations irréductibles de $\mathcal{H}_{\underline{k}, n}(1)$ sont indexées par les partitions de N telles que $\lambda \geq \underline{k}^{ord}$.

De plus, pour $\lambda \in \mathcal{P}_N$ une partition satisfaisant $\lambda \geq \underline{k}^{ord}$, la dimension de $W_{\underline{k}, \lambda}$ est égale à $K_{\lambda, \underline{k}}$.

Démonstration. Cf. [CPdA22]. □

Notation 4.1.36. On pose $U_{\underline{k}, n} := \{\lambda \in \mathcal{P}_{\sum_{i=1}^n k_i} \mid \lambda \geq \underline{k}^{ord}\}$. Nous noterons $\{W_{\underline{k}, \lambda}\}_{\lambda \in U_{\underline{k}, n}}$ les représentations irréductibles de $\mathcal{H}_{\underline{k}, n}(1)$, l'indexation étant justifiée par le théorème précédent.

Exemple 4.1.37. $n = 4$, $\underline{k} = (3, 2, 2, 1)$, $\lambda = (4, 4)$. Alors on a

$$SSTab((4, 4), \underline{k}) := \left\{ \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}}_{:= \mathbf{T}_0}, \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}}_{:= \mathbf{T}_1} \right\}.$$

La représentation irréductible $W_{\underline{k},(4,4)}$ est de dimension 2.

En revanche, la partition $\mu = (2, 2, 2, 2) \notin U_{\underline{k},n}$ bien que $\ell(\mu) = 4 = n$: on ne peut pas définir une représentation irréductible de la forme $W_{\underline{k},(2,2,2,2)}$.

Corollaire 4.1.38. On a l'égalité :

$$\dim(H_{\underline{k},n}(1)) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P}_N \\ \lambda \geq \underline{k}^{ord}}} K_{\lambda, \underline{k}}^2. \quad (4.8)$$

Démonstration. Résulte immédiatement des théorèmes (4.1.16), (4.1.35) et du corollaire (1.2.10). $\square$

Un corollaire intéressant simplifiant grandement le cas particulier où $\underline{k} = \{k, k, \dots, k\}$ est le suivant :

Corollaire 4.1.39. Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} = \underbrace{\{k, \dots, k\}}_{n \text{ fois}}$. Alors les représentations irréductibles (non équivalentes deux à deux) de $H_{\underline{k},n}(1)$ sont les $\{W_{\underline{k},\lambda}\}_{\lambda \in U_{\underline{k},n}}$, où $U_{\underline{k},n} = \{\lambda \in \mathcal{P}_{nk} \mid \ell(\lambda) \leq n\}$.

Démonstration. Notons $A_{\underline{k},n} := \{\lambda \in \mathcal{P}_{nk} \mid \ell(\lambda) \leq n\}$. Il suffit de montrer que $U_{\underline{k},n} = A_{\underline{k},n}$.

Soit $\lambda \in U_{\underline{k},n} \setminus A_{\underline{k},n}$, alors il existe un entier $i_0 > n$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. On a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq k$ puisque que $\lambda \geq \underline{k}$. Mais comme $\lambda \in \mathcal{P}_{nk}$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{i_0} > 0$, on a $\sum_{i=1}^{i_0} \lambda_i > nk$, d'où la contradiction, donc $U_{\underline{k},n} \subset A_{\underline{k},n}$.

Si $\lambda \in A_{\underline{k},n}$, alors l'égalité $\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i = kn$ entraîne $\lambda_{\ell(\lambda)} \geq k$. Mais alors $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{\ell(\lambda)} \geq k$, d'où $\lambda \in U_{\underline{k},n}$, donc $A_{\underline{k},n} \subset U_{\underline{k},n}$. $\square$

Exemple 4.1.40. • $n = 2$, $\underline{k} = (2, 2)$: on a $U_{\underline{k},n} = \{(4), (3, 1), (2, 2)\}$. Voyons les trois cas :

$$\begin{aligned} - SSTab((2, 2), \underline{k}) &= \left\{ \underbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}}_{:=T_0} \right\}. \\ - SSTab((3, 1), \underline{k}) &= \left\{ \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}}_{:=T_1} \right\}. \\ - SSTab((4), \underline{k}) &= \left\{ \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}}_{:=T_2} \right\}. \end{aligned}$$

Donc $\dim H_{\underline{k},n}(1) = 3$.

• $n = 3$, $\underline{k} = (2, 2, 2)$: on a $U_{\underline{k},n} = \{(6), (5, 1), (4, 2), (4, 1, 1), (3, 3), (3, 2, 1), (2, 2, 2)\}$. Voyons les sept cas :

$$\begin{aligned} - SSTab((6), \underline{k}) &= \left\{ \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}}_{:=T_0} \right\}. \\ - SSTab((5, 1), \underline{k}) &= \left\{ \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array}}_{:=T_1}, \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array}}_{:=T_2} \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \quad SSTab((4, 2), \underline{k}) &= \left\{ \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & & \\ \hline \end{array}}_{:=T_3}, \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline \end{array}}_{:=T_4}, \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline \end{array}}_{:=T_5} \right\}. \\
 - \quad SSTab((4, 1, 1), \underline{k}) &= \left\{ \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}}_{:=T_6} \right\}. \\
 - \quad SSTab((3, 3), \underline{k}) &= \left\{ \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}}_{:=T_7} \right\}. \\
 - \quad SSTab((3, 2, 1), \underline{k}) &= \left\{ \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}}_{:=T_8}, \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}}_{:=T_9} \right\}. \\
 - \quad SSTab((2, 2, 2), \underline{k}) &= \left\{ \underbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}}_{:=T_{10}} \right\}. \text{ Les représentations irréductibles de } H_{\underline{k},n}(1) \text{ sont au} \\
 &\text{nombre de sept, dont quatre de degré 1, deux de degré deux et une seule de degré} \\
 &\text{trois. En particulier, } \dim(H_{\underline{k},n}(1)) = 21.
 \end{aligned}$$

Notation 4.1.41. Pour $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ deux partitions, on note :

$$\mu \subset \lambda \iff \begin{cases} r \leq \ell \\ \mu_i \leq \lambda_i \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \end{cases}$$

Dans cette situation, on notera λ/μ l'ensemble des boîtes du diagramme de YOUNG de λ auquel on a retiré celles du diagramme de μ .

Exemple 4.1.42. Pour $\lambda = (3, 2, 1, 1)$ et $\mu = (2, 1)$, on a $\lambda/\mu = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$.

Théorème 4.1.43. Pour $\lambda \in SU_{\underline{k},n}$, la restriction de $W_{\underline{k},\lambda}$ à $H_{\underline{k},n-1}(q)$ se décompose ainsi :

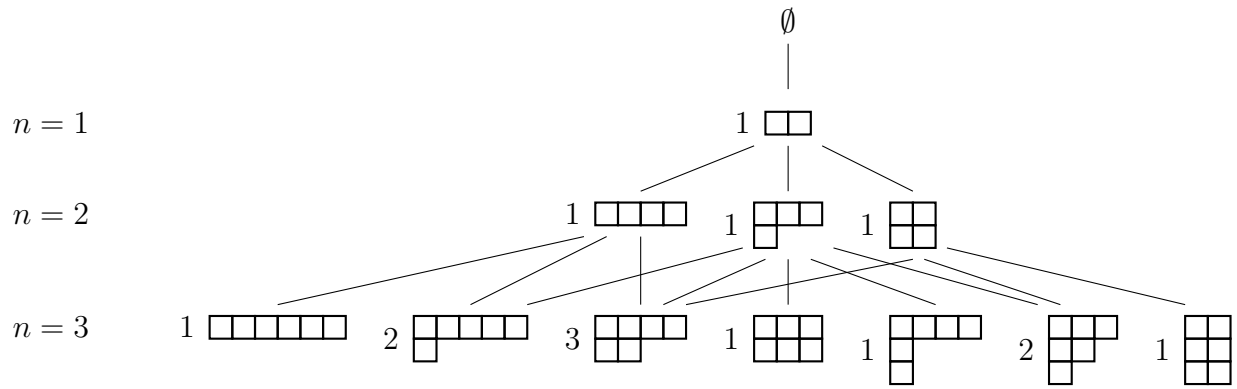
$$Res_{H_{\underline{k},n-1}(q)}(W_{\underline{k},\lambda}) \cong \bigoplus_{\mu \in Res_{\underline{k}}(\lambda)} W_{\underline{k},\mu}$$

où $Res_{\underline{k}}(\lambda) := \{\mu \in U_{\underline{k},n-1} \mid \mu \subset \lambda \text{ et } \lambda/\mu \text{ contient au plus une boîte dans chaque colonne.}\}$.

Démonstration. Cf. [CPdA22]. □

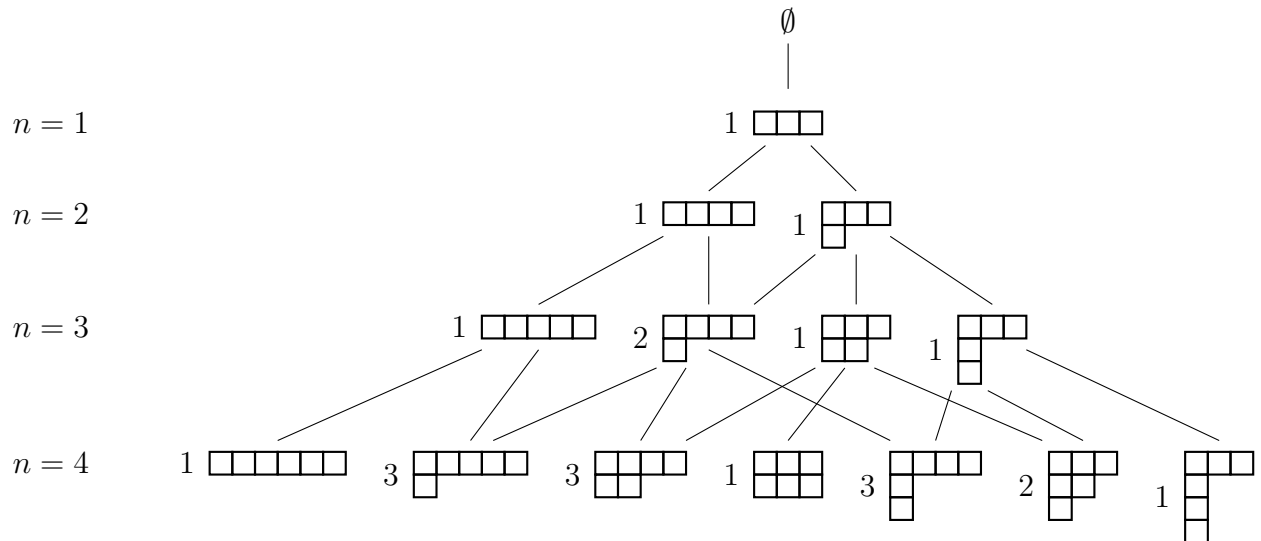
Voyons deux exemples de diagramme de BRATELLI pour la chaîne d'algèbres $\{H_{\underline{k},n}(1)\}_{n \geq 0}$:

— $\underline{k} = (2, 2, 2, \dots)$.



Remarquons, par exemple, qu'il n'y a pas de d'arête joignant $\mu = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ à $\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ même si $\mu \subset \lambda$ car λ/μ contient deux boîtes dans la même colonne.

— $\underline{k} = (3, 1, 1, \dots)$:



On rappelle que les $\{\mathbb{S}_\lambda(V)\}_{\lambda \in \mathcal{P}_{\sum_{i=1}^n k_i}}$ désignent les images de V par le foncteur de SCHUR, représentations de $GL(V)$.

Théorème 4.1.44. (*Extension de la dualité de Schur-Weyl*)

On a une décomposition de $\bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V)$ en $\mathbb{C}GL(V) \otimes H_{\underline{k},n}(1)$ modules irréductibles :

$$\bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V) \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \in U_{\underline{k},n} \\ \ell(\lambda) \leq \dim(V)}} \mathbb{S}_\lambda(V) \otimes W_\lambda \quad (4.9)$$

Démonstration. Cf. [CPdA22]. □

On aimerait pouvoir donner une nouvelle extension de la dualité de SCHUR-WEYL. Une possibilité est de considérer une sorte de déformation de l'algèbre $\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1)$ via l'ajout d'une indéterminée puis de construire une représentation de cette nouvelle algèbre obtenue sur un nouvel espace vectoriel. On se limitera dans la section suivante à la construction de cette nouvelle algèbre, l'extension de la dualité pour cette dernière nécessitant des connaissances sur les groupes quantiques.

4.2 Algèbres de Hecke fusionnées

Afin de construire la nouvelle algèbre mentionnée ci-dessus, nous avons besoin d'introduire un groupe important, le groupe des tresses, qui est l'objet de la sous-section qui suit.

4.2.1 Groupe des tresses, tresses fusionnées

On se référera dans cette section à [RC] pour des résultats complémentaires concernant le groupe des tresses.

Définition 4.2.1. On appelle **tresse géométrique** à n brins la donnée d'une $(n + 1)$ -uplet $T = (\sigma, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ tel que :

$$\begin{cases} \sigma \in \mathfrak{S}_n, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \gamma_i \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^3) \text{ homéomorphisme, } \gamma_i(0) = (i, 0, 1) \text{ et } \gamma_i(1) = (\sigma(i), 0, 0), \\ \forall z \in [0, 1], i \neq j \implies \gamma_i(z) \neq \gamma_j(z). \end{cases}$$

Définition 4.2.2. Deux tresses géométriques à n brins $T = (\sigma, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ et $T' = (\sigma', \gamma'_1, \dots, \gamma'_n)$ sont dits :

- **directement isotopes** si :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma' \\ \forall t \in [0, 1], T(t) = (\sigma, \delta_1, \dots, \delta_n) \text{ est une tresse géométrique telle que } \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ \delta_i = (1 - t)\gamma_i + t\gamma'_i \end{cases}$$

- **isotopes** s'il existe une suite finie $(T_i)_{i \in \{0, \dots, m\}}$ de tresses géométriques à n brins telles que :

$$\begin{cases} T_0 = T \\ T_m = T' \\ \forall i \in \{1, \dots, m - 1\}, T_i \text{ et } T_{i+1} \text{ sont directement isotopes} \end{cases}$$

Remarque 4.2.3. • La relation "être isotope à" est une relation d'équivalence.

- Deux tresses géométriques directement isotopes sont isotopes.

Notation 4.2.4. On notera $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des classes d'équivalences.

On va désormais munir cet ensemble d'une loi interne qui va lui conférer une structure de groupe.

Définition 4.2.5. Soient $T = (\sigma, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ et $T' = (\sigma', \gamma'_1, \dots, \gamma'_n)$ deux tresses géométriques à n brins. On définit la tresse géométrique produit $T \times T' = (\psi, \delta_1, \dots, \delta_n)$ par :

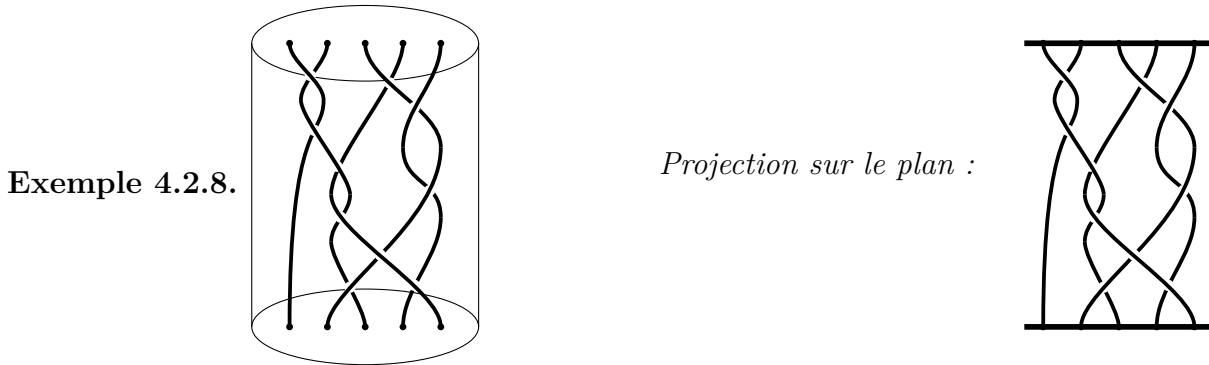
$$\begin{cases} \psi = \sigma' \circ \sigma \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall z \in [0, 1], \delta_i\left(\frac{z}{2}\right) = \gamma_i(z) \text{ et } \gamma_i\left(\frac{z+1}{2}\right) = \gamma'_{\sigma(i)}(z) \end{cases}$$

Théorème 4.2.6. $(\mathcal{T}_n, \times)$ est un groupe, appelé groupe des tresses géométriques à n brins.

Démonstration. Cf. [RC].

□

Remarque 4.2.7. Un élément de $\mathcal{T}_n$ peut toujours être représenté par une tresse géométrique ne contenant jamais deux croisements à la même hauteur : il est donc possible de projeter toute tresse dans le plan, afin d'obtenir un diagramme de tresse.



4.2.2 Ajout d'une indéterminée

On peut ici se référer à [PdA23] section (I.3.1).

Définition 4.2.9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et q une indéterminée.

On appelle **algèbre de Hecke**, notée $H_n(q)$, le quotient de l'algèbre $\mathbb{C}\mathcal{T}_n$ par la relation de HECKE :

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} - (q - q^{-1}) \left| \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right|$$

Remarque 4.2.10. La relation de HECKE est une relation locale, i.e. elle n'est appliquée qu'à une petite partie d'une tresse.

Pour tout élément $\omega \in \mathfrak{S}_n$, notons $\omega = s_{a_1} \circ \dots \circ s_{a_k}$ une expression réduite de ω en termes de générateurs $s_i = (i, i+1)$ et $\ell(\omega) = k$, i.e. utilisant un nombre minimal de tels générateurs.

Remarque 4.2.11. Une expression réduite d'une permutation n'est pas unique.

Exemple 4.2.12. $\sigma := (1, 3) \in \mathfrak{S}_3$, alors $\sigma = (1, 2) \circ (2, 3) \circ (1, 2)$ mais aussi $\sigma = (2, 3) \circ (1, 2) \circ (2, 3)$.

Définition 4.2.13. Pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on définit l'élément $\sigma_i \in \mathbb{C}\mathcal{T}_n$ par la i -ième **tresse élémentaire**, i.e. l'élément ayant un croisement positif entre les i et $i+1$ -ième brins, les autres brins étant verticaux.

À partir d'une expression réduite d'un élément $\omega = s_{a_1} \circ \dots \circ s_{a_k}$, on définit :

$$\sigma_\omega := \sigma_{a_1} \circ \dots \circ \sigma_{a_k} \in H_n(q).$$

Le q -**symétriseur** dans $H_k(q)$ est l'élément défini par :

$$P_k := \frac{\sum_{\omega \in \mathfrak{S}_k} q^{\ell(\omega)} \sigma_\omega}{\sum_{\omega \in \mathfrak{S}_k} q^{2\ell(\omega)}}.$$

Remarque 4.2.14. L'élément $\sigma_\omega \in H_n(q)$ ne dépend pas de l'expression réduite de ω .

Exemple 4.2.15. • $k = 2$: Les décompositions des éléments de $\mathfrak{S}_2$ sont évidentes. Ainsi, on a :

$$P_2 = \frac{1}{1+q^2} \left(\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right)$$

- $\underline{k} = 3$: On a $(1, 3) = (1, 2) \circ (2, 3) \circ (1, 2)$, $(1, 2, 3) = (1, 2) \circ (2, 3)$ et $(1, 3, 2) = (2, 3) \circ (1, 2)$. Ainsi on a :

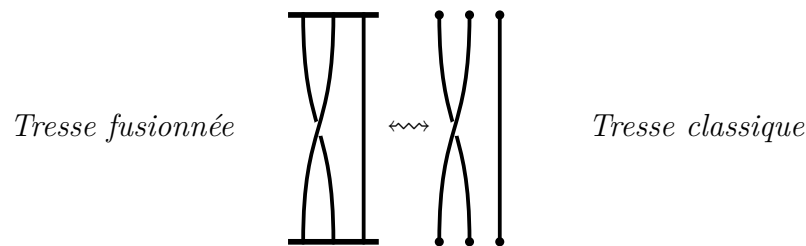
$$P_3 = \frac{1}{1+2q^2+2q^4+q^6} \left(\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} + q \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} + q \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} + q^2 \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} + q^2 \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} + q^3 \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} + q^3 \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \right)$$

On va maintenant définir, comme nous l'avons fait pour les permutations, une généralisation des tresses. Intuitivement, on peut voir cette généralisation comme l'algèbre $H_{\underline{k},n}(1)$ mais où les croisements vont désormais comptés ; on ne va donc pas seulement considérer le multi-set correspondant aux connections des points du haut avec ceux du bas.

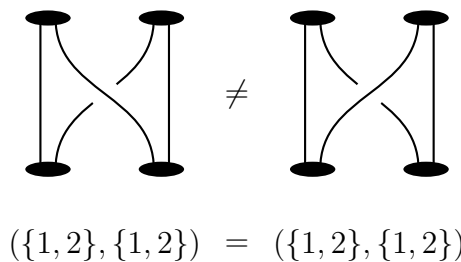
On considère, comme dans le cas des tresses (après la projection sur le plan), deux lignes horizontales (qu'on omettra par la suite), l'une au-dessus de l'autre avec n points fixés sur chacune des lignes. On demande de plus qu'il y ait, pour chaque $a \in \{1, \dots, n\}$, k_a brins connectant le a -ième point du haut et du bas. Remarquons que dans le cas des tresses, deux brins connectant le même point ne sont en réalité pas tout à fait connectés au même point (les croisements comptent !). Ils sont en fait attachés côte à côte dans un ordre qui compte. Enfin, on considère les diagrammes ainsi construits à isotopie près.

Définition 4.2.16. L'objet défini ci-dessus est appelé **tresse fusionnée**.

Exemple 4.2.17. • $n \in \mathbb{N}^*$ $\underline{k} = (1, 1, \dots, 1)$. On peut identifier une tresse fusionnée à une tresse classique. Par exemple, pour $n = 3$, on a l'identification



- $n = 2$, $\underline{k} = (2, 2)$.



Notation 4.2.18. On considère et note $\text{Vect}_{\underline{k},n}^{\text{fus}}$ l'espace vectoriel des combinaisons linéaires formelles des tresses fusionnées.

Définition 4.2.19. On note $H_{\underline{k},n}(q)$ l'espace vectoriel quotient de $\text{Vect}_{\underline{k},n}^{\text{fus}}$ par les relations suivantes :

1. La relation de HECKE pour chaque croisement :

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} - (q - q^{-1}) \begin{array}{c} | \\ | \end{array}$$

2. Les relations pour chaque croisement proche des ellipses (ou point) :

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} = q \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} = q^{-1} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} = q \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \bullet \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \bullet \end{array} = q^{-1} \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array}$$

où q est un paramètre, qui peut être vu comme une indéterminée ou un complexe non nul.

Remarque 4.2.20. • Ces relations sont locales.

- La relation de HECKE pour un croisement proche d'une ellipse n'est que la somme de deux relation du second point, d'où la compatibilité.

Exemple 4.2.21. Reprenons le cas $n = 2$, $\underline{k} = (2, 2)$, alors dans $H_{\underline{k},n}(q)$, on a :

$$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \diagup \quad \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \quad \diagdown \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} = q^{-1} \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \diagdown \quad \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \quad \diagup \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

Nous allons maintenant, comme pour $H_{\underline{k},n}(1)$, définir une multiplication afin de munir l'espace vectoriel $H_{\underline{k},n}(q)$ d'une structure d'algèbre.

Définition 4.2.22. (Multiplication) Soient b, b' deux tresses fusionnées. On définit $b \cdot b'$ par le résultat des étapes suivantes :

- Concaténation : On place le diagramme de b au-dessus du diagramme de b' en identifiant la ligne du bas de b avec la ligne du haut de b' .
- Élimination des points du milieu : Pour tout $a \in \{1, \dots, n\}$, il y a k_a brins arrivant et k_a brins partant de la a -ième ellipse dans la ligne du milieu. On enlève cette ellipse et on la remplace par son q -symétriseur P_{k_a} de l'algèbre de HECKE $H_{k_a}(q)$.

Exemple 4.2.23. • Voyons un exemple d'un produit de deux éléments de $H_{2,2}^{\text{fus}}(q)$:

$$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \diagup \quad \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \quad \diagdown \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \diagup \quad \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \quad \diagdown \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} = \frac{1}{(1+q^2)^2} \left(\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \diagup \quad \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \quad \diagdown \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + q \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \diagdown \quad \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \quad \diagup \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + q \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \diagdown \quad \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \quad \diagup \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + q^2 \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \diagup \quad \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \quad \diagdown \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{(1+q^2)^2} \left(\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + (q - q^{-1} + 2q^3) \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \diagup \quad \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \quad \diagdown \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + q^2 \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \diagdown \quad \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \quad \diagup \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right)$$

- Si $k_a = 3$, on a localement, suite à la concaténation, une ellipse (la a -ème) de la forme . On remplace alors cette dernière par :

$$\frac{1}{1+2q^2+2q^4+q^6} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} \right)$$

The diagrams are: 1. Three vertical lines. 2. A crossing of two vertical lines. 3. A crossing of two vertical lines with a horizontal line. 4. A crossing of two vertical lines with a horizontal line and a vertical line. 5. A crossing of two vertical lines with a horizontal line and a vertical line. 6. A crossing of two vertical lines with a horizontal line and a vertical line. 7. A crossing of two vertical lines with a horizontal line and a vertical line. 8. A crossing of two vertical lines with a horizontal line and a vertical line.

- $n = 2$, $\underline{k} = (2, 2)$, on a, via les relations de la définition (4.2.19) :

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \end{array}$$

The diagrams are: 1. Two vertical lines. 2. Two vertical lines. 3. A crossing of two vertical lines. 4. A crossing of two vertical lines. 5. A crossing of two vertical lines. 6. A crossing of two vertical lines. 7. A crossing of two vertical lines. 8. A crossing of two vertical lines. 9. Two vertical lines. 10. Two vertical lines.

Le dernier exemple nous laisse penser dans ce cas particulier que l'élément de $H_{\underline{k},n}(q)$ où tous les brins sont verticaux et n'ayant aucun croisement est l'unité de la multiplication $\cdot$. Il s'avère que ceci est vrai dans le cas général comme l'affirme le résultat qui suit.

Proposition 4.2.24. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} = (k_1, \dots, k_n)$. $(H_{\underline{k},n}(q), +, \cdot)$ est une algèbre associative unitaire.

Démonstration. Cf. [CPdA22]. □

Définition 4.2.25. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} = (k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, on définit l'élément de $H_{\sum_{i=1}^n k_i}(q)$ par :

$$P_{\underline{k},n} := \bigotimes_{i=1}^n P_{k_i} \quad (4.10)$$

qu'on considère comme élément de $H_{\sum_{i=1}^n k_i}(q)$ via l'identification de $\bigotimes_{i=1}^n H_{k_i}$ comme sous-algèbre de $H_{\sum_{i=1}^n k_i}(q)$.

Définition 4.2.26. On définit l'algèbre de HECKE fusionnée par :

$$\mathcal{H}_{\underline{k},n}(q) = P_{\underline{k},n} \cdot H_{\sum_{i=1}^n k_i}(q) \cdot P_{\underline{k},n} \quad (4.11)$$

Théorème 4.2.27. Les algèbres $H_{\underline{k},n}(q)$ et $\mathcal{H}_{\underline{k},n}(q)$ sont isomorphes.

Démonstration. Cf. [CPdA22]. □

Conclusion

À l'issue de ce mémoire, on connaît une décomposition essentielle (ARTIN-WEDDERBURN) d'une grande classe d'algèbres intervenant dans ce domaine, à savoir les algèbres semi-simples.

On connaît également l'intégralité des représentations irréductibles du groupe symétrique et leur construction explicite à l'aide des symétriseurs de YOUNG. Nous avons réussi à obtenir en plus les représentations qui sont en jeu dans la décomposition donnée par la dualité de Schur-Weyl par ces même symétriseurs via les foncteurs de SCHUR.

Enfin, une première généralisation de cette dualité est abordée avec une nouvelle algèbre, généralisant celle de l'algèbre du groupe symétrique, qui s'avère également être semi-simple (et rentre donc dans le cadre de la décomposition d'ARTIN-WEDDERBURN).

Dans une autre direction, on aurait pu étudier la théorie des caractères pour obtenir davantage d'informations sur les représentations intervenant dans la dualité. On aurait également pu considérer des actions de sous-groupes du groupe linéaire.

Ceci motive une poursuite de l'étude de cette dualité en détails mais également la recherche de ses généralisations, justifiant l'introduction des algèbres de HECKE fusionnées.

Parmi les nouvelles perspectives pour des recherches futures, on peut citer l'étude des déformations quantiques plus générales, les applications potentielles dans la théorie des représentations des groupes quantiques, ainsi que l'exploration des analogies et des connexions avec d'autres structures algébriques et géométriques.

Les avancées réalisées dans ce mémoire témoignent de la richesse et de la profondeur de la dualité de Schur-Weyl et des algèbres de Hecke, et encouragent la poursuite des recherches dans ce domaine fascinant et prometteur.

Bibliographie

- [GW09] R. GOODMAN, N. WALLACH, *Symmetry, Representations and Invariants*, Springer, 2009.
- [CPdA22] L. POULAIN D'ANDECY, N. CRAMPÉ, *Fused Braids and Centralisers of Tensor Representations of $U_q(\mathfrak{gl}_N)$* , 2022, Volume 26, pages 901–955.
- [PdA23] L. POULAIN D'ANDECY, *Centralisers and Hecke algebras in Representation Theory*, 2023. Arxiv : 2304.000850
- [BAU08] P. BAUMANN, *Introduction à la théorie des représentations*, cours M2, 2008. <https://irma.math.unistra.fr/~baumann/coursM2-2008.pdf>
- [CSST10] T. CECCHERINI-SILBERSTEIN, F. SCARABOTTI, F. TOLLI, *Representation theory of the symmetric groups*, Cambridge, 2010.
- [CAV17] M. CAVET, *Représentations irréductibles du groupe symétrique et dualité de Schur-Weyl*, 2017. http://math.univ-lyon1.fr/~germoni/memoires/TER_Cave.pdf
- [DEF] A. DÉFOSSEZ, *Modèle de Potts, représentations et dualité de Schur-Weyl*, ENS Paris. <https://www.math.ens.psl.eu/shared-files/9502/?Defossez.pdf&download=1>
- [RC] J. RIOU, X. CARUSO, *Groupe des tresses d'Artin*, cours M1. <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~joel.riou/doc/tresses.pdf>
- [BER10] D. BERTRAND, *Chapitre IV : Géométrie multilinéaire*, cours M1, 2010. https://webusers.imj-prg.fr/~daniel.bertrand/Enseignement/epdf/Algeo09_chap4.pdf
- [STA2] R. STANLEY, *Enumerative Combinatorics*, vol. 2, Cambridge Stud. Adv. Math (1999).
- [GRE80] J. A. GREEN, *Polynomial representations of GL_n* , Lecture Notes in Mathematics, Vol. 830, Springer, 1980.