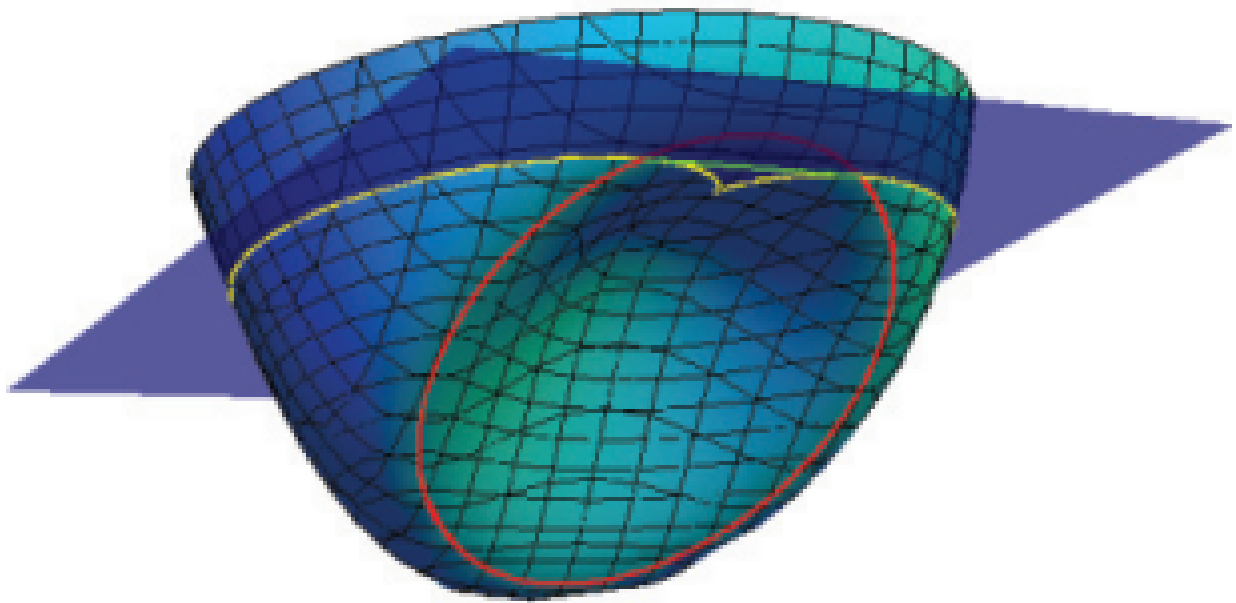


Spectraèdres



Ce mémoire est rédigé par Demesmay Yoann
Encadrant : Faenzi Daniele

05/05/2022

Table des matières

1	Les Cônes $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^{++}$, Convexité, Compacité	8
1.1	Rappels	8
1.2	Les cônes $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^{++}$	9
1.2.1	Définitions	9
1.2.2	Propriétés, Caractérisations	10
1.3	Convexité	12
1.3.1	Définitions	12
1.3.2	Quelques propriétés de la convexité	13
1.4	Compacité	15
2	Spectraèdre, Spectraplexe, Polyèdre	16
2.1	Coupes des spectraèdres	16
2.2	Spectraèdre, Spectraèdre projeté	18
2.3	Exemples	19
2.3.1	Spectraèdre	19
2.3.2	Spectraèdre projeté	22
2.4	Simplexe, Spectraplexe, Elliptope	23
2.5	Polytopes, Polyèdres	24
2.5.1	Dimension 2	25
2.5.2	Cas de la dimension 3	25
2.5.3	Dimension supérieure	29
3	Optimisations Linéaire, Semi-Définie et Conique	30
3.1	Optimisation Linéaire	30
3.1.1	Programmation Linéaire	30
3.1.2	Recherche d'un optimum	33
3.1.3	Dualité	34
3.2	Programmation Semi-Définie	36
3.2.1	Définitions et formulation	36
3.2.2	Approche de la dualité (version faible)	39
3.2.3	Dualité forte	42
3.2.4	Existence de solutions	46
3.2.5	Conditions d'optimalité	47
3.3	Programmation conique	48
3.3.1	Formulation des programmations coniques	48
3.3.2	Dualité	49
4	Applications En Optimisation	52
4.1	Optimisation de valeurs propres	52
4.1.1	Recherche des valeurs propres minimales et maximales	52
4.1.2	Minimisation du rayon spectral d'une matrice	53
4.1.3	Minimisation de la norme spectrale d'une matrice	54
4.2	Optimisation combinatoire	56

Introduction

Les spectraèdres sont des coupes affines du cône semi-défini. Il s'agit plus précisément du cône des matrices symétriques à valeurs propres non-négatives. Cela motive l'appellation "spectraèdre", par analogie avec le terme "polyèdre", puisque le *spectre* d'une matrice désigne précisément l'ensemble de ses valeurs propres. Ces objets ont une géométrie complexe. En effet, il s'agit d'une généralisation des polyèdres, comme nous le verrons, dont les arêtes et les faces peuvent être incurvées. On peut visualiser les spectraèdres à condition de les découper en tranches de dimension suffisamment faible. Mais l'étude de ces objets amène à une question : Quelle est son utilité ?

Les spectraèdres peuvent être rencontrés par certains ingénieurs et mathématiciens lors d'études portant sur des problèmes de commandes des systèmes ou alors d'optimisation de structures (assurer qu'un pont soit suffisamment solide, concevoir les pièces d'une construction). Ces derniers sont de dimension de l'ordre de la dizaine de milliers, il est donc clairement impossible de les visualiser, le nombre de coupes de faible dimension étant trop important. Cependant, bien qu'on ne puisse pas les représenter, il est important de pouvoir travailler dessus avec aisance : c'est l'objet de la *programmation semi-définie (PSD)* et des *inégalités matricielles linéaires (IML)* qui sont une branche moderne de l'optimisation (nécessitant de l'analyse/optimisation convexe) permettant aux ingénieurs de résoudre (par ordinateur) divers problèmes de conception.

Ainsi, la programmation semi-définie a connu un regain d'intérêt depuis les années 90 (lien avec l'apparition d'algorithmes efficaces permettant de les résoudre).

Depuis peu, l'étude de ces problèmes est devenue un véritable axe de recherche à part entière. Cet intérêt suscité est dû aux différents champs d'application comme :

1. L'optimisation combinatoire (Voir Chapitre 4) qui, en vertu de la PSD, permet d'obtenir des bornes pour ces problèmes d'optimisation.
2. L'optimisation (non convexe) qui traite de problèmes essentiellement résolus par la programmation quadratique successive (PQS).

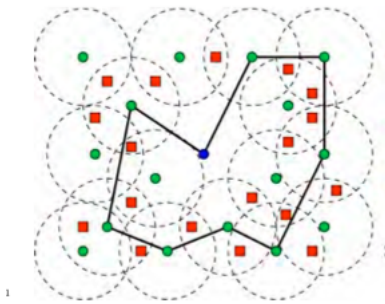


FIGURE 1 – Optimisation combinatoire

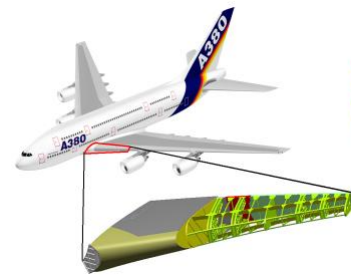


FIGURE 2 – Optimisation dans le domaine aérien

L'objectif de ce mémoire est d'établir le lien fort entre l'ensemble des spectraèdres et les inégalités matricielles, ce qui nous amène à l'étude de la programmation semi-définie. Ce mémoire s'organise comme suit :

- Le chapitre 1 concernera de brefs rappels bien connus et des résultats non exhaustifs sur certaines notions (Convexité, Compacité, etc.) afin d'avoir les notions de base pour la suite.
- Le chapitre 2 portera sur l'approche des spectraèdres qui est une généralisation des polyèdres dont nous établirons une classification en petite dimension.
- Le chapitre 3 est le cœur du mémoire. En effet, nous verrons une étude théorique des problèmes d'optimisation semi-définie et le fort lien qu'ils possèdent avec ce que l'on appelle la dualité. Nous établirons ainsi des résultats d'existence et de conditions d'optimalité sur les solutions.
- Le chapitre 4 portera enfin sur une brève application de cette PSD (optimisation combinatoire, réduction spectrale).

Notations :

- $:=$ signifie égal par définition.
- *i.e.* signifie *c'est-à-dire*.
- *s.c.* signifie *sous contrainte(s)*.
- $\mathbb{K}$ désigne un corps (commutatif, qui sera généralement $\mathbb{R}$ ici).
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où m_{ij} est le coefficient de M situé sur la i -ième ligne, j -ième colonne.
- $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne la matrice identité.
- M^T désigne la transposée de la matrice M .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{tr}$ désigne le produit scalaire de Frobenius.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques positives $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices symétriques définies positives $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{O}_n := \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients réels.
- Soient $A, B \in M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note alors " $A - B$ " est définie positive" (respectivement "semi-définie positive") si et seulement si $A \succ B$ (respectivement $A \succeq B$, où $\succ$ (respectivement $\succeq$) est le symbole de Löwner.
- Pour $x = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{K}^m$, $x \geq 0 \iff \forall i \in \{1, \dots, m\}, x_i \geq 0$.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
- χ_A est le polynôme caractéristique associé à $A \in \mathcal{M}_n$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $\chi_A(t) = \det(tI_n - A)$
- $Sp(A)$ désigne le spectre d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *i.e.*, l'ensemble des valeurs propres de A à valeurs dans $\mathbb{K}$, comptées avec répétition.
- $Int(A)$ désigne l'intérieur de A pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- A^c désigne le complémentaire de A .
- E^* désigne l'espace dual de E .

Chapitre 1

Les Cônes $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^{++}$, Convexité, Compacité

Dans l'ensemble de ce chapitre, on fixe $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ le corps des nombres réels (bien qu'une majeure partie des propriétés introduites ci-dessous soient généralisables à des corps quelconques ordonnés). Ainsi on notera les ensembles $\mathcal{M}_n := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n := \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1.1 Rappels

Définition 1.1.1. Une **matrice** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ de taille $n \times m$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de tailles n à coefficients dans K . On note $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n$ avec (m_{ij}) le coefficient de M à la i -ième ligne et la j -ième colonne.

Définition 1.1.2. Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n$, on pose $A^T = (a_{ji})_{1 \leq i, j \leq n}$ la **transposée** de A . Une matrice $M \in \mathcal{M}_n$ est dite **symétrique** si $M^T = M$, i.e., $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} (m_{ij}) = (m_{ji})$.

Définition 1.1.3. Une matrice $M \in \mathcal{S}_n$ est **définie positive** si pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x^T M x > 0$. Une matrice $M \in \mathcal{S}_n$ est **semi-définie positive** si pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x^T M x \geq 0$.

Définition 1.1.4. Soit $A \in \mathcal{M}_n$. Soient $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. Les mineurs d'une matrice $A = (a_{ij})$ de taille k sont les déterminants des matrices de la forme $A_{I,J} = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}$ où $I, J \in \{1, \dots, n\}$ ont pour cardinal k . On appelle **mineur principal** de A le déterminant de $A_{I,I} = (a_{ij})_{i \in I, j \in I}$ où $I = J$. On appelle **mineur principal dominant** de A le déterminant de $A_{I,I} = (a_{ij})_{i \in I, j \in I}$ où $I = J = \{1, \dots, k\}$.

Remarque 1.1.5. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n$ possède $2^n - 1$ mineurs principaux. En effet, cela revient à chercher tous les sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ pour k allant de 1 à n égaux entre eux. L'ensemble des sous ensembles à k éléments parmi n est donné par la formule

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \binom{n}{0} = 2^n - 1$$

Exemple 1.1.6. Soit $A \in \mathcal{S}_3$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Les mineurs principaux de A sont les déterminants des matrices

$$A_{\{1\},\{1\}} = (2), \quad A_{\{2\},\{2\}} = (-1), \quad A_{\{3\},\{3\}} = (3)$$

et

$$A_{\{1,2\},\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_{\{2,3\},\{2,3\}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_{\{1,3\},\{1,3\}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$A_{\{1,2,3\},\{1,2,3\}} = A$$

On a bien $2^3 - 1 = 7$ mineurs principaux.

Définition 1.1.7. La **somme de Minkowski** de deux sous-ensembles X, Y de E est

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$$

On définit de même le produit de X par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $\lambda X = \{\lambda x \mid x \in X\}$.

1.2 Les cônes $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^{++}$

Cette section est rédigée afin de faire quelques rappels et définitions bien connus pour la suite sur les ensembles $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^{++}$.

1.2.1 Définitions

Le mot spectraèdre est une contraction du mot "spectre" (*spectra*), évoquant les valeurs propres d'une matrice, avec "èdre" (*hedra*), suggérant que les spectraèdres sont une généralisation des polyèdres (convexes).

Définition 1.2.1. Soit E un espace vectoriel réel. Une partie $\mathcal{K}$ de E est un **cône** si et seulement si $\mathcal{K}$ est stable pour la multiplication par tout réel strictement positif, autrement dit,

$$\mathbb{R}_+^* \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$$

Exemple 1.2.2. 1. Les ensembles $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^{++}$ définis ci-dessous sont des cônes.
2. Les orthants $\mathbb{R}^n$ et $(\mathbb{R}_+)^n$ et $(\mathbb{R}_+^*)^n$ sont des cônes.

Définition 1.2.3. Le **cône des matrices symétriques semi-définies positives** (ou cône semi-défini) est l'ensemble $\mathcal{S}_n^+ = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mid x^T M x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$

Proposition 1.2.4. L'ensemble $\mathcal{S}_n^+$ est un cône convexe.

Démonstration. Soient $M \in \mathcal{S}_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Alors pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$x^T (\lambda M) x = \lambda \underbrace{x^T M x}_{\geq 0} \geq 0$$

donc $\lambda M \in \mathcal{S}_n$. Donc $\mathbb{R}_+^* \mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}_n$

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n$ et $\lambda \in [0, 1]$, alors pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$x^T (\lambda A + (1 - \lambda) B) x = \lambda \underbrace{x^T A x}_{\geq 0} + (1 - \lambda) \underbrace{x^T B x}_{\geq 0} \geq 0$$

□

Définition 1.2.5. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n . On considère l'application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle A, B \rangle_{tr} = \text{Tr}(A^T B)$$

Il s'agit d'un produit scalaire (i.e. forme bilinéaire symétrique définie positive) appelée **produit scalaire de Frobenius**.

La **norme de Frobenius** associée est

$$\|A\|_{tr} = (\text{Tr}(A^T A))^{\frac{1}{2}} \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Remarque 1.2.6. 1. En restreignant le produit scalaire à $\mathcal{S}_n$, on a $\langle A, B \rangle_{tr} = \text{Tr}(AB)$ et $\|A\|_{tr} = \text{Tr}(A^2)^{\frac{1}{2}}$

2. Le couple $(\mathcal{S}_n, \|\cdot\|_{tr})$ est un espace-vectoriel normé de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

3. Pour $A \in \mathcal{S}_n$, on a : $\|A\|_{tr} = \max_{\{i=1, \dots, n\}} |\lambda_i(A)|$ où λ_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ sont les valeurs propres (réelles) de A .

1.2.2 Propriétés, Caractérisations

On résume ici uniquement les résultats qui nous seront utiles pour l'ensemble du mémoire.

Théorème 1.2.7. (Théorème Spectral)

Soit A une matrice dans $\mathcal{S}_n$. Alors il existe une base de vecteurs orthonormés dans laquelle A est diagonale, i.e., il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_n$ telle que $A = PDP^T$ où $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où λ_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ sont les valeurs propres de A .

Démonstration. On peut retrouver la preuve à [11]. □

Remarque 1.2.8. Ce résultat est essentiel pour démontrer des résultats puissants sur l'espace vectoriel normé $(\mathcal{S}_n, \|\cdot\|_{tr})$. Il s'agit du résultat matriciel du théorème spectral.

Lemme 1.2.9. Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}$. Considérons sa représentation sous forme de blocs :

$$\begin{pmatrix} B & C^T \\ C & D \end{pmatrix}$$

où B et D sont des matrices carrées de taille $k \times k$ et $(n-k) \times (n-k)$ respectivement, et C une matrice rectangulaire $(n-k) \times k$.

Alors les matrices B et D sont symétriques définies positives.

Démonstration. Soit y un vecteur non nul de dimension k , $y^T = (y_1, \dots, y_k)$ et soit $x^T = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)$. Alors $y^T B y = x^T A x > 0$. Soit z un vecteur non nul de dimension $(n-k)$, $z^T = (z_1, \dots, z_{n-k})$ et soit $x^T = (0, \dots, 0, z_1, \dots, z_{n-k})$. Alors $z^T D z = x^T A x > 0$. □

Un résultat important concernant la caractérisation des matrices :

Théorème 1.2.10. Soit $M \in \mathcal{S}_n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La matrice M est semi-définie positive
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T M x \geq 0$
3. $Sp(M) \subset \mathbb{R}_+$
4. Tous les $2^n - 1$ mineurs principaux de M sont positifs
5. Les coefficients de $\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_n)$ alternés sont positifs
6. Il existe une factorisation $M = BB^T$, où $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ et r est le rang de M .

Démonstration. On pourra se référer à [13] □

Remarque 1.2.11. Cette caractérisation est essentielle afin de simplifier les calculs durant la suite du mémoire.

Exemple 1.2.12. Pour $n = 2$, le cône des matrices semi-définies positives S_2^+ est l'ensemble des matrices symétriques $A := \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ telles que $x \leq 0, z \leq 0, xz \leq y^2$

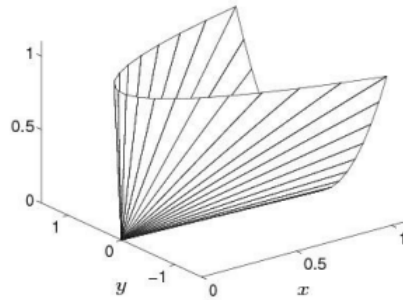


FIGURE 1.1 – Représentation du cône S_2^+

Proposition 1.2.13.

$$\text{Int}(\mathcal{S}_n^+) = \mathcal{S}_n^{++}$$

Démonstration. 1. $\mathcal{S}^{++}$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n$. En effet, soit $(M_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{S}_n^{++}$ qui converge vers un élément $M \in \mathcal{S}_n$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $x_m \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\langle M_m x_m, x_m \rangle \leq 0$. Puisque $x_m \neq 0$, on peut sans perte de généralité prendre x_m dans la sphère unité S qui est compacte (fermé borné en dimension finie). Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{m_k})_{k \geq 0}$ telle que

$$x_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x$$

où $x \in S$.

L'application

$$\Psi : \begin{cases} \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (M, x) & \longmapsto \langle Mx, x \rangle \end{cases}$$

étant continue (car polynomiale en les coefficients (M, x)). Comme

$$\langle M_{m_k} x_{m_k}, x_{m_k} \rangle \leq 0$$

La continuité de Ψ nous assure que $\langle Mx, x \rangle \leq 0$, autrement dit, $M \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{S}_n^{++}$. Donc $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{S}_n^{++}$ est fermé.

2. Voyons maintenant l'égalité $\text{Int}(\mathcal{S}_n^+) = \mathcal{S}_n^{++}$

Supposons $M \in \text{Int}(\mathcal{S}_n^+)$, il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $M - \epsilon I_n \in \mathcal{S}_n^+$. Par conséquent, $M = \underbrace{(M - \epsilon I_n)}_{\succeq 0} + \epsilon I_n \in \mathcal{S}_n^{++}$. En effet, soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors

$$x^T((M - \epsilon I_n) + \epsilon I_n)x = \underbrace{x^T(M - \epsilon I_n)x}_{\geq 0} + \underbrace{x^T \epsilon I_n x}_{> 0} > 0$$

Donc $\text{Int}(\mathcal{S}_n^+) \subset \mathcal{S}_n^{++}$

Réciproquement, comme $\mathcal{S}_n^{++}$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n$, que $\mathcal{S}_n^{++} \subset \mathcal{S}_n^+$ et que, par définition, $\text{Int}(\mathcal{S}_n^+)$ est le plus grand ouvert contenu dans $\mathcal{S}_n^+$, on a clairement $\mathcal{S}_n^{++} \subset \text{Int}(\mathcal{S}_n^+)$.

Ceci conclut la preuve. $\square$

Théorème 1.2.14. (Théorème de Fejér)

1. $A \succeq 0 \iff \langle A, B \rangle_{tr} \geq 0 \quad \forall B \succeq 0$
2. $A \succ 0 \iff \langle A, B \rangle_{tr} > 0 \quad \forall B \succeq 0 \text{ non nulle}$
3. Pour $A, B \in \mathcal{S}_n^+$, on a

$$\langle A, B \rangle_{tr} = 0 \iff AB = 0$$

Démonstration. On démontre seulement 1., les idées des deux autres preuves des assertions étant similaires (décomposition spectrale). Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+$. Par le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n$ et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ telle que $B = P^T D P$. On pose $C := (c_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} = P A P^T \succeq 0$ d'où $c_{ii} \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Comme $A = P^T C P$, il vient :

$$\langle A, B \rangle_{tr} = \langle P^T C P, P^T D P \rangle_{tr} = \text{Tr}(DC) = \langle D, C \rangle_{tr} = \sum_{i=1}^n d_{ii} c_{ii} \geq 0$$

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n$ telle que $\langle A, B \rangle_{tr} \geq 0 \quad \forall B \succeq 0$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice $B := x x^T \in \mathcal{S}_n^+$, on a

$$\langle x, Ax \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle A, x x^T \rangle_{tr} \geq 0$$

donc $A \in \mathcal{S}_n^+$. $\square$

1.3 Convexité

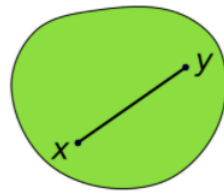
1.3.1 Définitions

On considère E un espace vectoriel réel de dimension quelconque.

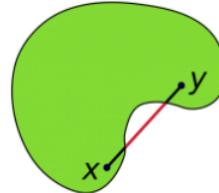
Définition 1.3.1. Un sous-ensemble X de E est dit :

1. **affine** si $\forall (x, y) \in X^2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad tx + (1 - t)y \in X$
2. **convexe** si $\forall (x, y) \in X^2, \forall t \in [0, 1], \quad tx + (1 - t)y \in X$

Autrement dit, un ensemble est affine (respectivement convexe) s'il contient toute droite (respectivement tout segment) passant par deux de ses points.



partie convexe



partie non convexe

Exemple 1.3.2. • Un ensemble affine est convexe.

- Pour toute forme linéaire $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$, le sous-niveau $\{x \in E \mid \phi(x) \leq b\}$ est un ensemble convexe appelé demi-espace.

Proposition 1.3.3. Une intersection (quelconque) de convexes est convexe.

Démonstration. Soit $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ une famille de convexes.

Notons $\mathcal{C} = \cap_{i \in I} \mathcal{C}_i$. Soient $x, y \in \mathcal{C}$ et $t \in [0, 1]$, alors $\forall i \in I, tx + (1 - t)y \in \mathcal{C}_i$ donc

$$tx + (1 - t)y \in \mathcal{C}$$

□

On peut ainsi définir la notion d'enveloppe convexe

Définition 1.3.4. Soit A une partie de E . **L'enveloppe convexe** de A , notée $\text{Conv}(A)$ est l'intersection de toutes les parties convexes de E qui contiennent A , autrement dit,

$$\text{Conv}(A) = \bigcap_{A \subset F, F \text{ convexe}} F$$

Proposition 1.3.5. L'enveloppe convexe d'une partie A de E est le plus petit ensemble convexe contenant A .

Théorème 1.3.6. (Carathéodory) Soit E un espace affine de dimension n . Alors l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble A est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de familles de $n + 1$ points de A . Autrement dit,

$$\text{Conv}(A) = \left\{ \text{Bary}(A_i, \lambda_i)_{i \in [0, n]} \mid A_0, \dots, A_n \in A, (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

Démonstration. On se référera à [9].

□

1.3.2 Quelques propriétés de la convexité

Un théorème classique sur la convexité d'un ensemble sur un espace vectoriel euclidien :

Théorème 1.3.7. (Projection sur un convexe fermé) Soient E un espace vectoriel euclidien et $\mathcal{C}$ un convexe fermé non-vide de E . Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ un produit scalaire sur E . Soit $x \in E$. Alors :

1. $\exists ! y \in \mathcal{C}$ vérifiant $\|x - y\| = d(x, \mathcal{C}) = \inf_{z \in \mathcal{C}} \|x - z\|$. y est noté $p(x)$ (projection).
2. $p(x)$ est caractérisé par $\forall z \in \mathcal{C}, \langle z - p(x), x - p(x) \rangle_E \leq 0$

Démonstration. 1. Existence : Notons $\delta = d(x, \mathcal{C}) = \inf_{z \in \mathcal{C}} \|x - z\|$. Par définition de δ et la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe $(y_n) \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - y_n\| = \delta$. Soient $p, q \in \mathbb{N}$, et appliquons l'égalité du parallélogramme à $(x - y_p)$ et $(x - y_q)$.

$$\|(x - y_p) + (x - y_q)\|^2 + \|(x - y_p) - (x - y_q)\|^2 = 2(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_q\|^2)$$

$$\|2x - y_p - y_q\|^2 + \|y_q - y_p\|^2 = 2(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_q\|^2)$$

Comme $\mathcal{C}$ est convexe, $\frac{y_q - y_p}{2} \in \mathcal{C}$ pour tout p et q donc $\|x - \frac{y_p - y_q}{2}\| \geq \delta$ donc $\|2x - y_p - y_q\|^2 \geq \delta^2$. Finalement,

$$\|y_q - y_p\|^2 \leq 2\|x - y_p\|^2 + 2\|x - y_q\|^2 - 4\delta^2$$

Lorsque p et q tendent vers l'infini, le terme de droite tend vers 0 donc (y_n) est de Cauchy. Comme E est supposé de dimension finie, E est complet d'où (y_n) est une suite convergente vers un certain $y \in \mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ est fermé et, par continuité de la norme, $\|x - y\| = d(x, \mathcal{C})$

Unicité : Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{C}$ à distance de δ de x . Par l'identité du parallélogramme, on a :

$$\|y_1 - y_2\|^2 \leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$$

donc $y_1 = y_2$.

2. Soit $z \in \mathcal{C}$. Notons pour $t \in]0, 1[$

$$z_t = tz + (1 - t)p(x) \in \mathcal{C}$$

On a

$$\|x - p(x) + t(p(x) - z)\|^2 = \|x - tz - (1 - t)p(x)\|^2 = \|x - z_t\|^2 \geq \|x - p(x)\|^2$$

Soit en développant

$$t^2\|p(x) - z\|^2 + 2t\langle x - p(x), p(x) - z \rangle_E \geq 0$$

$$t\|p(x) - z\|^2 - 2\langle x - p(x), z - p(x) \rangle_E \geq 0$$

En faisant tendre t vers 0, on obtient l'inégalité

$$\langle x - p(x), z - p(x) \rangle_E \leq 0$$

□

Théorème 1.3.8. (Séparation d'un point et d'un convexe fermé dans un espace en dimension finie)
Si $\mathcal{C}$ est un convexe fermé non vide d'un espace E de dimension finie et x_0 un point de E n'appartenant pas à $\mathcal{C}$, il existe un hyperplan affine H séparant strictement x_0 de $\mathcal{C}$. Autrement dit $\mathcal{C}$ et x_0 sont inclus chacun dans un demi-espace ouvert différent défini par H . En particulier $\mathcal{C}$ est inclus dans l'un des demi-espaces affines associés à H .

Démonstration. Soient x_0 et $\mathcal{C}$ comme dans l'énoncé. La distance

$$d(x_0, \mathcal{C}) = \inf\{\|y - x_0\| \mid y \in \mathcal{C}\}$$

de x_0 à $\mathcal{C}$ est strictement positive, puisque $x_0 \notin \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est fermé. Le théorème de projection sur un convexe fermé d'un espace euclidien dit qu'il existe un unique point y_0 de $\mathcal{C}$ réalisant cette distance, c'est-à-dire $\|y_0 - x_0\| = d(x_0, \mathcal{C})$, caractérisé par les inéquations :

$$\forall y \in \mathcal{C}, \langle y - y_0, x_0 - y_0 \rangle_E \leq 0 \quad (1.1)$$

Posons $f(y) = \langle y, x_0 - y_0 \rangle_E$; la fonction f est une forme linéaire non nulle sur E . La condition peut être reformulée :

$$\forall y \in \mathcal{C}, f(y) \leq f(y_0)$$

Par ailleurs, on a $f(x_0) = f(y_0) + f(x_0 - y_0) = f(y_0) + \|x_0 - y_0\|^2 > f(y_0)$

Soit H l'hyperplan défini par

$$y \in H \iff f(y) = c$$

où $c = \frac{f(x_0) + f(y_0)}{2} = f\left(\frac{x_0 + y_0}{2}\right)$ (H est l'hyperplan médiateur du segment $[x_0, y_0]$). On remarque que

$$f(x_0) > c \text{ et } \forall y \in \mathcal{C}, f(y) < c$$

Autrement dit, x_0 et $\mathcal{C}$ sont inclus dans les demi-espaces ouverts différents définis par H . $\square$

1.4 Compacité

On se restreindra seulement aux notions qui vont être utilisées dans ce mémoire.

Définition 1.4.1. (*Propriété de Borel-Lebesgue*) Une partie A de E est compacte si et seulement si :

1. A est séparé
2. De tout recouvrement d'ouvert $(U_i)_{i \in I}$ (I ensemble fini ou non) de A , on peut extraire un sous-recouvrement fini d'ouverts $(U_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ de A .

Un théorème essentiel dans le cadre de ce mémoire est la caractérisation des parties compactes d'un espace de dimension finie.

Théorème 1.4.2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Les ensembles compacts de E sont les fermés bornés de E

Démonstration. Nécessite quelques notions peu utiles ici. (Espaces pré-compact, complet, etc.) Se référer à [10] pour la démonstration. $\square$

Remarque 1.4.3. Les objets dans ce mémoire étant étudiés généralement dans $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension finie ($\dim(\mathbb{R}^n) = n$), la compacité est plus simple à montrer.

Exemple 1.4.4. Dans $E = \mathbb{R}$, tout segment de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ est compact.

Théorème 1.4.5. (*Bolzano-Weierstrass*)

Toute suite de réels bornée admet une suite extraite convergente.

Chapitre 2

Spectraèdre, Spectraplexe, Polyèdre

2.1 Coupes des spectraèdres

Au-delà de la définition formelle des spectraèdres que nous allons voir, il est important de comprendre ces objets à la géométrie complexe (généralisation des polyèdres dont les arrêtes et les faces peuvent être incurvées). On peut ainsi les visualiser à condition de les "découper en tranches" : c'est l'objet de cette section.

On va observer les coupes du cône semi-défini.

Equation quadratique et son spectraèdre

Le cône infini

On considère l'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et $c \in \mathbb{R}$. On voit facilement que les conditions afin d'obtenir l'inégalité quadratique sont les suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (2.1)$$

Il est clair que $a \geq 0$ car l'égalité doit restée satisfaite lorsque x devient grand. Afin que ce polynôme n'ait pas de racine (et ainsi que l'égalité soit satisfaite), il faut que $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$ *i.e.* $4ac - b^2 \geq 0$. Ainsi on obtient des conditions sur a, b et $c \in \mathbb{R}$ qui délimite une région par les inégalités :

$$a \geq 0, \quad 4ac - b^2 \geq 0 \quad (2.2)$$

L'ensemble, non borné, ressemble à un cône.

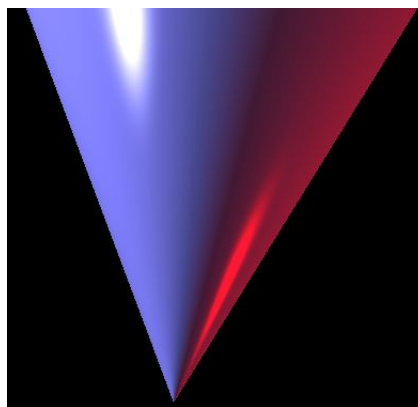


FIGURE 2.1 – Représentation du cône non borné

Proposition 2.1.1. *L'ensemble $\mathcal{S} := \{a, b, c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} \quad ax^2 + bx + c \geq 0\}$ est **convexe***

Démonstration. Soient a_1, b_1, c_1 et a_2, b_2, c_2 les coordonnées de deux points de $\mathcal{S}$. Elles vérifient donc

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 \geq 0, \quad ax_2^2 + b_2x + c_2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Les points du segment reliant ces deux points ont pour coordonnées $(ka_1 + (1-k)a_2)$, $(kb_1 + (1-k)b_2)$, $(kc_1 + (1-k)c_2)$ où $k \in [0, 1]$.

En utilisant (2.3), on obtient donc

$$ka_1x^2 + kb_1x + kc_1 \geq 0$$

et

$$(1-k)a_2x^2 + (1-k)b_2x + (1-k)c_2 \geq 0$$

En sommant les deux inégalités établies ci-dessus, on obtient finalement :

$$(ka_1 + (1-k)a_2)x^2 + (kb_1 + (1-k)b_2)x + (kc_1 + (1-k)c_2) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in [0, 1]$$

Ainsi le segment entier est inclus dans le $\mathcal{S}$, qui est convexe. □

Remarque 2.1.2. *Il s'agit en fait d'un spectraèdre comme nous le verrons.*

Généralisation

On peut désormais essayer de généraliser ces équations. Considérons l'inégalité quadratique

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + exy + f \geq 0$$

avec x, y deux variables, a, b, c, d, e et f des paramètres réels. On cherche à déterminer la géométrie de l'ensemble

$$\mathcal{S}_C := \{(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \mid ax^2 + by^2 + cx + dy + exy + f \geq 0\}$$

Ce dernier est compliqué à représenter car il est dans un espace à six dimensions. Afin de limiter les degrés de liberté, nous pouvons fixer certains coefficients de l'ensemble $\mathcal{S}_C$ ce qui permet de "sectionner" notre ensemble comme nous l'avons fait pour le cône infini. Par exemple, fixons les plans $a = 1$, $b = 1$ et $f = 1$. Ainsi l'ensemble peut être représenté car nous avons diminué ses degrés de liberté. Cet ensemble est appelé spectraèdre de Cayley ou elliptope et nous le reprendrons plus tard dans le mémoire. De la même façon, on peut représenter l'ensemble avec ces coupes affines.

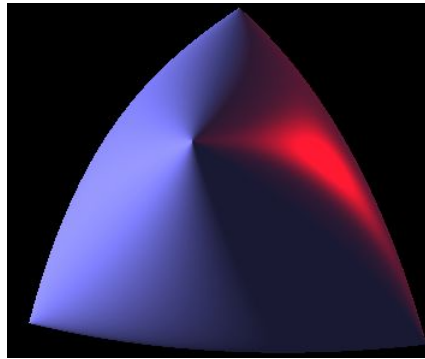


FIGURE 2.2 – Représentation de l'ensemble $\mathcal{S}_C$ avec les coupes affines expliquées ci-dessus

Remarque 2.1.3. *On pourra voir en Annexe (4.2) d'autres représentations de coupes affines.*

2.2 Spectraèdre, Spectraèdre projeté

Définition 2.2.1. Un ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ est un **spectraèdre** s'il a la forme :

$$\mathcal{S} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i \succeq 0 \right\}$$

où $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}^n$

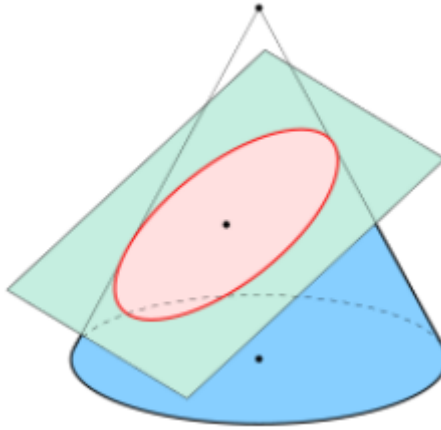


FIGURE 2.3 – Représentation de l'intersection d'un espace affine avec ce cône convexe de matrices

Remarque 2.2.2. Un spectraèdre est l'intersection d'un espace affine avec le cône convexe des matrices semi-définies positives. Puisqu'un espace affine de matrices symétriques réelles de dimension n peut être paramétré par

$$A(x) := A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$$

où $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A_0, \dots, A_n$ sont des matrices symétriques réelles, d'où la définition.

Les spectraèdres possèdent des propriétés intéressantes.

Proposition 2.2.3. Un spectraèdre est **convexe** et **fermé**.

Démonstration. Convexe : Soit $\mathcal{S} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i \succeq 0\}$ où $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}^n$ un spectraèdre. Soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{S}$ et $t \in [0, 1]$, alors, pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$z^T \left(A_0 + \sum_{i=1}^n A_i (tx_i + (1-t)y_i) \right) z = \underbrace{z^T \left(A_0 + t \sum_{i=1}^n A_i x_i \right) z}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^n (1-t) (z^T A_i y_i z)}_{\geq 0} \geq 0$$

Autrement dit le segment $[x, y] \in \mathcal{S}$ d'où la convexité de $\mathcal{S}$.

Fermé : On remarque que :

$$\mathcal{S} = \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid y^T \left(A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i \right) y \geq 0 \right\}$$

par la caractérisation des matrices semi-définies positives. En posant $\psi_y : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow y^T (A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i) y$ qui est polynomiale en les variables $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ donc continue, on a finalement :

$$\mathcal{S} = \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} \underbrace{\psi_y^{-1}([0, +\infty[)}_{\text{fermé}}$$

Une intersection de fermés étant fermée, ceci conclut la preuve. $\square$

Définition 2.2.4. Un ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$ est un **spectraèdre projeté** s'il est de la forme :

$$\mathcal{S} = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid \exists (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p \quad A_0 + \sum_{i=1}^m A_i x_i + \sum_{j=1}^p B_j y_j \succeq 0 \right\}$$

où $A_0, A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_p \in \mathcal{S}^n$

Comme son nom l'indique, on peut l'interpréter géométriquement comme un spectraèdre de $\mathbb{R}^{m+p}$ qui est "projeté" par l'application linéaire $\pi : \mathbb{R}^{m+p} \rightarrow \mathbb{R}^m, (x, y) \rightarrow x$

ATTENTION : Un spectraèdre projeté n'est, en général, pas un spectraèdre comme on le verra dans les exemples qui suivront. Il s'agit d'une des majeures différences avec les polyèdres pour lesquels nous savons que la projection linéaire de ce dernier est toujours un polyèdre.

Cependant, les spectraèdres projetés sont d'une grande importance dans l'optimisation. En effet, il est possible de réduire un problème d'optimisation linéaire (défini ci-après) sur un spectraèdre projeté à la solution d'un programme semi-défini standard. De plus, beaucoup d'ensembles convexes peuvent être représentés sous cette forme, d'où l'introduction de cet objet.

2.3 Exemples

Une illustration à travers de simples exemples est importante afin de bien comprendre les deux objets considérés.

2.3.1 Spectraèdre

Le cylindre

On peut écrire l'équation du cylindre comme suit

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$$



FIGURE 2.4 – Représentation du cylindre $\mathcal{C}$

On peut le paramétrer par l'ensemble

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1+x & y & 0 & 0 \\ y & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-z \end{pmatrix} \succeq 0 \right\}$$

Proposition 2.3.1. Le cylindre est un spectraèdre.

Démonstration. Notons

$$A = \begin{pmatrix} 1+x & y & 0 & 0 \\ y & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-z \end{pmatrix}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Cette matrice est définie positive au point $(0, 0, 0)$. Elle est semi-définie positive pour tous les autres points dans le cylindre.

En vertu du théorème et lemme précédents, les sous-matrices :

$$A_{\{1,2\},\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 1+x & y \\ y & 1-x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_{\{3,4\},\{3,4\}} = \begin{pmatrix} 1+z & 0 \\ 0 & 1-z \end{pmatrix}$$

sont clairement symétriques, définies positives et donc :

$$\det \begin{pmatrix} 1+x & y \\ y & 1-x \end{pmatrix} \geq 0 \iff x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} 1+z & 0 \\ 0 & 1-z \end{pmatrix} \geq 0 \iff -1 \leq z \leq 1$$

On retrouve bien la paramétrisation du cylindre. □

Le "Coussin"

Un autre exemple "classique" de ces objets géométriques est le "Coussin" (the "Pillow"). Considérons la matrice

$$\mathcal{Q}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & x \\ x & 1 & y & 0 \\ 0 & y & 1 & z \\ x & 0 & z & 1 \end{pmatrix}$$

et l'ensemble

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{Q}(x, y, z) \succeq 0\}$$

$\mathcal{P}$ est un spectraèdre ressemblant à un "coussin" d'où son nom. La frontière de $\mathcal{P}$ est la surface définie par le déterminant

$$\det(\mathcal{Q}(x, y, z)) = x^2(y - z)^2 - 2x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$$



FIGURE 2.5 – Illustration du "coussin" défini ci-dessus

Le spectraèdre de Cayley (ou ellipsoïde)

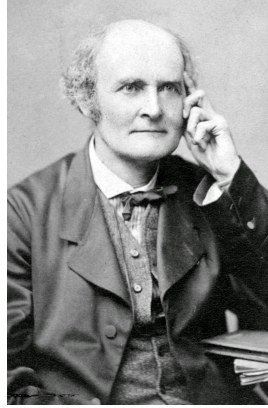


FIGURE 2.6 – Le mathématicien britannique Arthur Cayley (1821-1895)

Le spectraèdre de Cayley est certainement l'un des spectraèdres les plus connus et les plus simples à étudier (avec le cylindre). Il est généralement noté $\mathcal{S}_C$. On peut, de la même façon, écrire l'équation de ce dernier comme suit :

$$\mathcal{S}_C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid A(x, y, z) := \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & z \\ y & z & 1 \end{pmatrix} \succeq 0 \right\}$$

Cet ensemble ne peut pas être représenté en utilisant (un nombre fini) de cônes linéaires ou quadratiques.

Pour avoir une intuition géométrique de $\mathcal{S}_C$, remarquons que :

$$\det(A(x, y, z)) = -(x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz - 1)$$

de sorte que la frontière de $\mathcal{S}_C$ peut être caractérisée par

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1$$

On obtient la figure suivante :

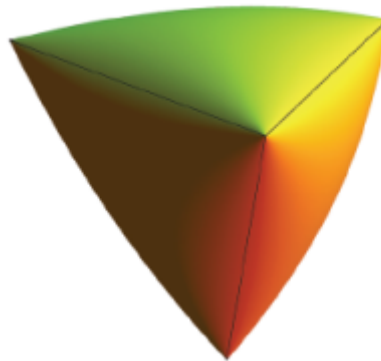


FIGURE 2.7 – Représentation du spectraèdre de Cayley

On remarque la ressemblance avec un tétraèdre régulier. C'est en partie en cela où l'on dit que les spectraèdres sont une généralisation des polyèdres.

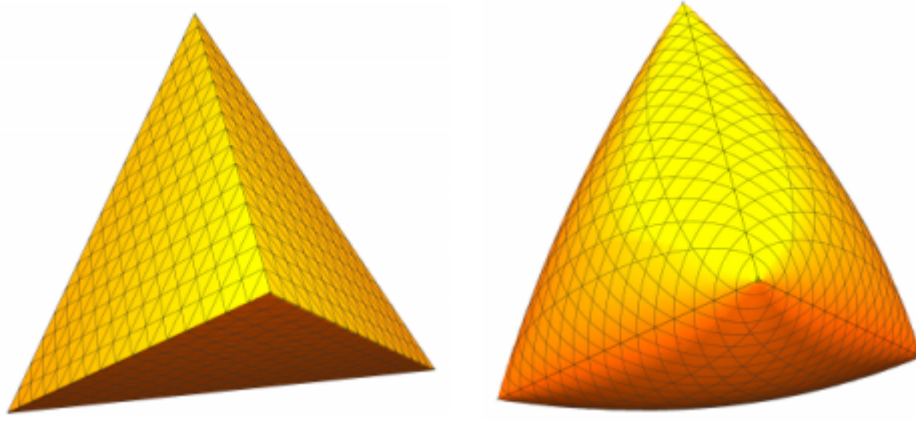


FIGURE 2.8 – Illustrations de Joel A. Trop permettant de voir la ressemblance

Un tétraèdre $\mathcal{T}$ peut avoir la représentation "spectraédrique" suivante :

$$\mathcal{T} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} l_1(x, y, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2(x, y, z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4(x, y, z) \end{pmatrix} \succeq 0 \right\}$$

avec $l_i(x, y, z) = a_i x + b_i y + c_i z + d_i$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ bien choisies.

En effet, on aura :

$$\begin{cases} l_1(x, y, z) = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \geq 0 \\ l_2(x, y, z) = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \geq 0 \\ l_3(x, y, z) = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \geq 0 \\ l_4(x, y, z) = a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 \geq 0 \end{cases}$$

2.3.2 Spectraèdre projeté

Considérons le sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\mathcal{S} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists z \in \mathbb{R}, \begin{bmatrix} z + y & 2z - x \\ 2z - x & z - y \end{bmatrix} \succeq 0, \quad z \leq 1 \right\}$$

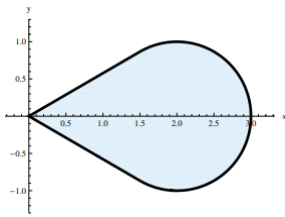


FIGURE 2.9 – Spectraèdre projeté défini ci-dessus

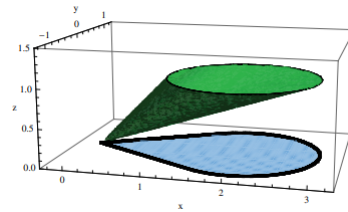


FIGURE 2.10 – Spectraèdre et son projeté

Les illustrations nous montrent qu'il s'agit de la projection sur $\mathbb{R}^2$ d'un spectrahèdre dans $\mathbb{R}^3$. Ainsi, par définition de l'ensemble $\mathcal{S}$, pour $z \in \mathbb{R}$ fixé, l'ensemble décrit par

$$\begin{bmatrix} z + y & 2z - x \\ 2z - x & z - y \end{bmatrix} \succeq 0 \iff \begin{cases} z + y \geq 0 \\ (x - 2z)^2 + y^2 \leq z^2 \end{cases}$$

est un disque de rayon z centré en $(2, 0)$. Ainsi, ce spectrahèdre est l'enveloppe convexe du disque de rayon z centré en $(2z, 0)$ et l'origine $(0, 0)$. Ce dernier constitue un exemple d'un spectrahèdre projeté n'étant pas un spectrahèdre.

2.4 Simplexe, Spectraplexe, Elliptope

Définitions et propriétés

Définition 2.4.1. Un n -simplexe est l'enveloppe convexe de $(n+1)$ points qui ne sont pas contenus dans un même hyperplan (affine). On peut également définir le **simplexe standard** de $\mathbb{R}^n$ par

$$\text{Simp}_n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

Remarque 2.4.2. • Un **simplexe** (ou n -simplexe) est l'analogue à n dimensions du triangle
 • Son nom vient du fait qu'il s'agit de l'objet géométrique clos le "plus simple" qui ait n dimensions.

Définition 2.4.3. Le **spectraplexe** (standard) est la version "spectraédrale" du simplexe. Il est défini par

$$\text{Spec}_n = \{M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 1\}$$

Proposition 2.4.4. Le simplexe et le spectraplexe sont **compacts**

Démonstration. On étudie deux ensembles de dimension finie ; il suffit ainsi de montrer que ces ensembles sont des fermés bornés.

Simplexe : $\text{Simp}_n = \underbrace{\psi^{-1}(\{1\})}_{\text{fermé}} \cap \underbrace{(\mathbb{R}^+)^n}_{\text{fermé}}$ avec $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ polynomiale donc continue.

Simp_n est une intersection de fermés, c'est donc un fermé. De plus, pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \text{Simp}_n$, comme pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \geq 0$, on a

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \implies \forall i \in \{1, \dots, n\}, 0 \leq x_i \leq 1 \implies \|x\|_\infty \leq 1$$

Spectraplexe : On a $\text{Spec}_n = \underbrace{\text{Tr}^{-1}(\{1\})}_{\text{fermé}} \cap \underbrace{\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}_{\text{fermé}}$ donc Spec_n est un ensemble fermé. Voyons qu'il s'agit

d'un ensemble borné. Comme on est en dimension finie, les normes sont équivalentes. Soit $M \in \text{Spec}_n$. En vertu du théorème spectral, il existe une base $\mathcal{B}$ de sorte que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(M) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ où $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \subset (\mathbb{R}^*)^n$. Etant donné que $\text{Tr}(M) = 1$, on a $\|M\| = \sigma(M) \leq 1$ où $\sigma(M)$ désigne la valeur singulière de M . $\square$

L'hyperplan $\{\text{Tr} M = 1\}$ intersecte $\mathcal{S}_n^+$ sur un ensemble compact et définit une base pour ce cône.

Elliptope

Soit $\overline{\mathcal{E}_n}$ l'ensemble des matrices semi-définies positives avec 1 sur les éléments de la diagonale, autrement dit :

$$\overline{\mathcal{E}_n} = \{X \in \mathcal{S}_n \mid X_{ii} = 1 \ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

L'ensemble convexe $\overline{\mathcal{E}_n}$ est contenu dans un sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ de codimension n défini par les contraintes $X_{ii} = 1$.

A travers les quelques exemples explicités plus haut ainsi que les propriétés des spectraèdres, nous avons compris que cet objet est modélisé par une inégalité matricielle linéaire ou IML (pour *Linear Matrix Inequality*). Ainsi de nombreux problèmes d'optimisation en théorie du contrôle (étude du comportement de systèmes dynamiques paramétrés en fonction des trajectoires de leurs paramètres), en

identification de système (technique de l'automatique consistant à obtenir un modèle mathématique d'un système à partir de mesures) et traitement du signal peuvent être formulés grâce à des IML. C'est l'objet du chapitre qui va suivre.

2.5 Polytopes, Polyèdres

On note $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et V sa direction muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V \times V} \longrightarrow \mathbb{R}$

Définition 2.5.1. • Un **polytope** de $\mathcal{E}$ est une intersection finie de demi-espaces de $\mathcal{E}$ d'intérieur non vide.
• Un **polyèdre** est un polytope compact.

Dans $\mathbb{R}^n$, un polyèdre est une enveloppe convexe d'un sous-ensemble fini de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Il est bien entendu compact (fermé et borné). Sa dimension est, par définition, celle de l'espace affine qu'il engendre. De plus, le théorème de Carathéodory, rappelé dans le chapitre 1, énonce que tout point de l'enveloppe convexe d'un ensemble $\Sigma \in \mathbb{R}^n$ est barycentre, avec coefficients strictement positifs, d'un sous-ensemble de Σ formé de points affinement indépendants.

Définition 2.5.2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. Soit P un polyèdre de $\mathcal{E}$.

- On appelle **mur** de P tout hyperplan H de $\mathcal{E}$ tel que :
 1. $P \cap H$ est d'intérieur non vide dans H .
 2. P est inclus dans un des deux demi-espaces (fermés) limité par H .
- On appelle **face** d'un polytope P tout sous-ensemble de P défini comme $P \cap H$, où H est un hyperplan affine tel que P soit entièrement contenu dans un des deux demi-espaces fermés que H définit.
- Une **facette** de P est une face de dimension $\dim(P) - 1$.
- Un **sommet** est une facette de dimension 0.
- On appelle **simplexe ouvert** (ou n -simplexe ouvert) l'intérieur relatif d'un n -simplexe.

Ainsi défini, on obtient des résultats sur les polytopes et le lien fort qu'ils possèdent avec les n -simplexes.

Proposition 2.5.3. Les sommets d'un polyèdre P sont en nombre fini et leur enveloppe convexe est P .

Démonstration. Soit Σ un ensemble de cardinal minimal fini dont P est l'enveloppe convexe. Voyons que Σ est exactement l'ensemble des sommets de P . Soit s un sommet de P . Le **théorème de Carathéodory** stipule l'existence de $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ et $s_1, \dots, s_m$ point de Σ affinement indépendants tels que $s = \sum_{i=1}^m \lambda_i s_i$. Si $m > 1$, s est dans l'intérieur du segment joignant $(1 - \lambda_3 - \dots - \lambda_m)s_1 + \lambda_3 s_3 + \dots + \lambda_m s_m$ à $(1 - \lambda_3 - \dots - \lambda_m)s_2 + \lambda_3 s_3 + \dots + \lambda_m s_m$, ce qui est absurde par définition du sommet. On a donc $m = 1$, c'est-à-dire $s \in \Sigma$.

Maintenant, pour tout point $s \in \Sigma$, notons $Q \subset P$ l'enveloppe convexe de $\Sigma \setminus \{s\}$. On a $Q \neq P$ par minimalité de Σ . Notons x le point de Q le plus proche de s et H l'hyperplan affine passant par x et orthogonal au segment $[xs]$. Son équation est $\phi(y) = \langle y_x, s - x \rangle = 0$, et ϕ est une fonction affine négative sur Q , strictement positive en s . Par conséquent, ϕ atteint son maximum sur P en le seul point s , qui est par conséquent un sommet de P $\square$

On a vu qu'un n -simplexe était l'enveloppe convexe de $n + 1$ point affinement indépendants dans $\mathbb{R}^n$. Il s'agit donc exactement des polyèdres de dimension n avec $n + 1$ sommets par la proposition précédente.

- Remarque 2.5.4.** 1. Un point est un 0-simplexe et un 0-simplexe ouvert.
 2. $\emptyset$ et P sont des faces de P , dites faces "impropres", les autres faces étant dites "propres".
 3. Un polytope est la réunion disjointe des intérieurs relatifs de ses faces.

Théorème 2.5.5. Tout polytope P est une réunion disjointe de simplexes ouverts dont les sommets sont des sommets de P

Démonstration. Soit s un sommet de P , soient $F_1, \dots, F_n$ les faces (propres) de P ne contenant pas s et soient $F'_1, \dots, F'_n$ leurs intérieurs relatifs. Les ensembles $\{s\}$, $\text{Conv}(\{s\} \cup F'_1) \setminus \{s\}, \dots, \text{Conv}(\{s\} \cup F'_n) \setminus \{s\}$ forment une partition de P . En raisonnant par récurrence sur la dimension de P , on peut décomposer chaque F_i en réunion disjointe de simplexes ouverts dont les sommets sont des sommets de F_i , donc de P . En excluant les simplexes contenus dans $F_i - F'_i$, on obtient une décomposition de chaque F'_i en réunion disjointe de simplexes ouverts, donc aussi une telle décomposition de chaque $\text{Conv}(\{s\} \cup F'_i) \setminus \{s\}$. $\square$

2.5.1 Dimension 2

- Définition 2.5.6.** • Un **polygone** est une figure géométrique plane formée d'une ligne brisée, i.e. une suite cyclique de segments consécutifs.
 • Un polygone est dit **régulier** s'il est équilatéral et tous ses angles sont de même mesure.

En dimension 2, il existe une infinité de polygones réguliers convexes.
 En effet, pour tout $k \leq 3$, il est toujours possible de construire un (unique) polygone régulier et convexe à k côtés :

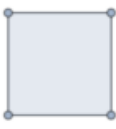
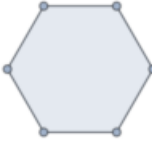
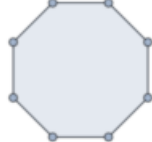
$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	...
						...
Triangle Équilatéral	Carré	Pentagone Régulier	Hexagone Régulier	Heptagone Régulier	Octogone Régulier	...

FIGURE 2.11 – Liste (non exhaustive) des polygones de dimension 2.

2.5.2 Cas de la dimension 3

Définition 2.5.7. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 et P un polyèdre dans $\mathcal{E}$. On dit que P est **régulier** (convexe) s'il existe deux entiers $p, q \geq 3$ tels que :

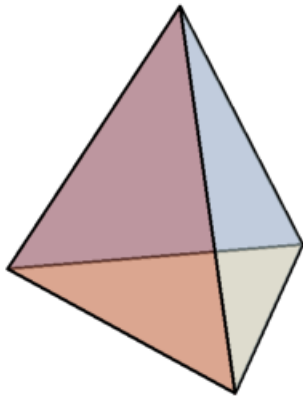
1. Toutes les faces de P sont des polygones réguliers à p côtés.
2. Tout sommet de P appartient à exactement q faces de P .

Suite à cette définition, un résultat important concernant la classification des polyèdres réguliers dans $\mathcal{E}$ en dimension 3 est le suivant :

Théorème 2.5.8. (*Les Solides de Platon*) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. Il existe exactement 5 classes de similitude de polyèdres réguliers dans $\mathcal{E}$:

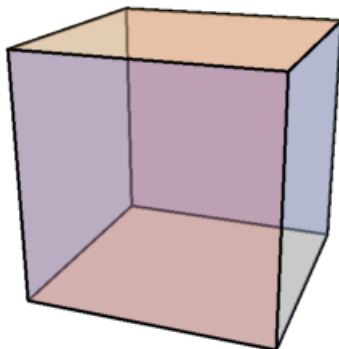
1. Les **tétraèdres** (avec 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces)
2. Les **hexaèdres** (ou cubes) (avec 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces)
3. Les **octaèdres** (avec 6 sommets, 12 arêtes et 8 faces)
4. Les **dodécaèdres** (avec 20 sommets, 30 arêtes et 12 faces)
5. Les **icosaèdres** (avec 12 sommets, 30 arêtes et 20 faces)

Le Tétraèdre



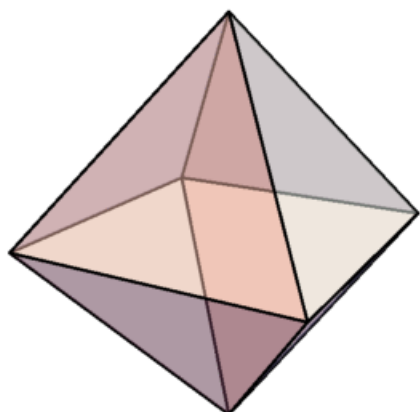
Nature des faces	Triangles équilatéraux
Nombre de faces par sommet	3
Nombre de sommets	4
Nombre d'arêtes	6
Nombre de faces	4
Nombre de symétries	24

L'Hexaèdre (ou Cube)



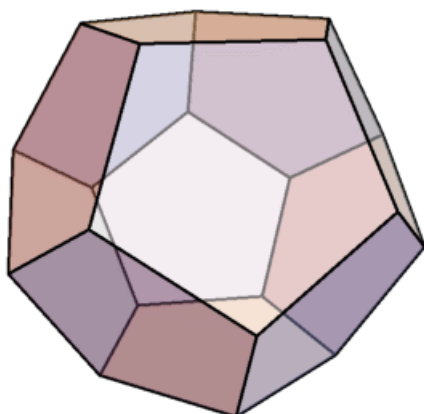
Nature des faces	Carrés
Nombre de faces par sommet	3
Nombre de sommets	8
Nombre d'arêtes	12
Nombre de faces	6
Nombre de symétries	48

L'Octaèdre



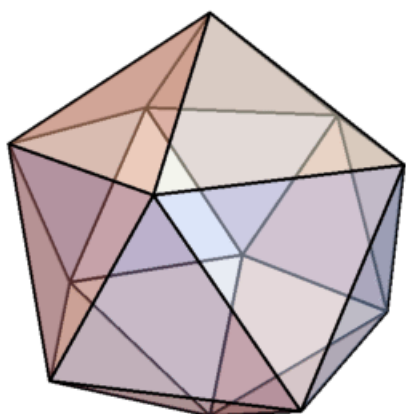
Nature des faces	Triangles équilatéraux
Nombre de faces par sommet	4
Nombre de sommets	6
Nombre d'arêtes	12
Nombre de faces	8
Nombre de symétries	48

Le Dodécaèdre



Nature des faces	Pentagones réguliers
Nombre de faces par sommet	3
Nombre de sommets	20
Nombre d'arêtes	30
Nombre de faces	12
Nombre de symétries	120

L'Icosaèdre



Nature des faces	Triangles équilatéraux
Nombre de faces par sommet	5
Nombre de sommets	12
Nombre d'arêtes	30
Nombre de faces	20
Nombre de symétries	120

Démonstration. Soit P un polyèdre régulier (convexe) dans $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des faces, $\mathcal{A}$ l'ensemble des arêtes et $\mathcal{P}$ l'ensemble des sommets de P . L'angle entre deux arêtes consécutives d'une face de P est $\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi$. En effet, soit F une face. On découpe la face en p triangles isocèles d'angles α, α et β . Les sommets de chaque triangle sont le centre de la face et deux sommets de F .

Si θ est l'angle entre deux arêtes consécutives de F , alors $\theta = 2\alpha$. On a $\pi = \beta + 2\alpha$ et $p\beta = 2\pi$, d'où :

$$p\pi = p\beta + 2p\alpha = 2\pi + p\theta \implies \theta = \left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi$$

En considérant la somme des angles autour d'un sommet de P , on obtient $2\pi > q\left(\pi - \frac{2\pi}{p}\right)$. Par conséquent on obtient les deux inégalités :

$$p < \frac{2q}{q-2}, \quad q < \frac{2p}{p-2}$$

De la première inégalité, on obtient $p \leq 5$. En regardant les différents cas pour $p \in \{3, 4, 5\}$ et en utilisant les inégalités ci-dessus on en conclut

$$(p, q) \in \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)\}$$

De plus, on a les égalités :

$$2|\mathcal{A}| = |\{(x, a) \in \mathcal{S} \times \mathcal{A} \mid x \in a\}| = q|\mathcal{S}|$$

$$2|\mathcal{A}| = |\{(a, f) \in \mathcal{A} \times \mathcal{F} \mid a \subset f\}| = p|\mathcal{F}|$$

$$|\mathcal{S}| - |\mathcal{A}| + |\mathcal{F}| \quad (\text{relation d'Euler})$$

On en déduit

$$|\mathcal{A}| = \frac{2pq}{2p + 2q - pq}$$

$$|\mathcal{S}| = \frac{4p}{2p + 2q - pq}$$

$$|\mathcal{F}| = \frac{4q}{2p + 2q - pq}$$

Conclusion :

$$(p, q) = (3, 3) \implies |\mathcal{S}| = 4, \quad |\mathcal{A}| = 6, \quad |\mathcal{F}| = 4$$

$$(p, q) = (3, 4) \implies |\mathcal{S}| = 6, \quad |\mathcal{A}| = 12, \quad |\mathcal{F}| = 8$$

$$(p, q) = (3, 5) \implies |\mathcal{S}| = 12, \quad |\mathcal{A}| = 30, \quad |\mathcal{F}| = 20$$

$$(p, q) = (4, 3) \implies |\mathcal{S}| = 8, \quad |\mathcal{A}| = 12, \quad |\mathcal{F}| = 6$$

$$(p, q) = (5, 3) \implies |\mathcal{S}| = 20, \quad |\mathcal{A}| = 30, \quad |\mathcal{F}| = 12$$

Le quintuplet $(|\mathcal{S}|, |\mathcal{A}|, |\mathcal{F}|, p, q)$ déterminant entièrement la classe de similitude de P , ceci conclut la preuve. $\square$

Remarque 2.5.9. *Il existe également quatre polyèdres réguliers non-convexes, appelés les Solides de Kepler-Poinsot.*



FIGURE 2.12 – Représentation des Solides de *Kepler-Poinsot*

2.5.3 Dimension supérieure

Pour des raisons similaires à celles vues en dimension 3, il n'existe qu'un nombre fini de polyèdres réguliers convexes de dimension 4. (six en tout, cinq d'entre eux sont les analogues quadridimensionnels des solides de Platon). il existe également dix polychores réguliers non-convexes, appelés les *Polychores de Schläfli-Hess*

En revanche, en dimension supérieure à quatre, il n'existe plus que trois polyèdres réguliers convexes par dimension. Il s'agit des analogues du cube, du tétraèdre et de l'octaèdre. De plus, il n'existe plus de polyèdres réguliers non-convexes en dimension 5 et supérieure. On doit ces résultats au mathématicien suisse Ludwig Schläfli.



FIGURE 2.13 – Ludwig Schläfli (1814-1895)

Chapitre 3

Optimisations Linéaire, Semi-Définie et Conique

3.1 Optimisation Linéaire

Rappelons que, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0 \iff x_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

3.1.1 Programmation Linéaire

Définition 3.1.1. La **programmation linéaire** est le problème de minimiser une fonction linéaire sujet à des contraintes linéaires.

Soient $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}$.

On cherche alors à minimiser $c^T x$ sous certaines contraintes, i.e.,

$$\min\{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } Ax = b\}$$

Un problème d'optimisation linéaire sous forme standard (PLS) est souvent écrit comme :

$$\begin{cases} \min & c^T x \\ \text{contraint à} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

Remarque 3.1.2. • L'équation est généralement appelée *Programmation Linéaire Primal* (PLP).

• Le minimum n'existe pas toujours.

Proposition 3.1.3. Tout problème d'optimisation linéaire peut être mis sous forme d'un (PLS), éventuellement au prix d'un ajout de nouvelles variables.

Démonstration. Pour transformer un problème quelconque en (PLS) :

- $\max \rightsquigarrow \min$: on transforme $\max(cx + b)$ en $b - \min(-c)x$
- $cx + b \rightsquigarrow cx$: on transforme $\min(cx + b)$ en $b + \min cx$
- x_j quelconque $\rightsquigarrow x_j \geq 0$: on peut écrire un scalaire sans contrainte de signe, $y \in \mathbb{R}$, sous la forme $y = z_1 - z_2$, avec $z_1, z_2 \geq 0$
- $vx \geq \alpha \rightsquigarrow vx = \alpha$: on $vx \geq \alpha \iff vx - z = \alpha$ pour un scalaire $z \geq 0$
- $vx \leq \alpha \rightsquigarrow vx = \alpha$: on $vx \leq \alpha \iff vx + z = \alpha$ pour un scalaire $z \geq 0$
- Dans les deux derniers cas : $z =$ variable d'écart

□

Exemple 3.1.4. Le problème $\max(x_1 - x_2 + 3)$ sous $x_1 + x_2 \geq 1$, $x_1 \leq 0$ équivaut à $\min(z_1 + z_2 - z_3)$ sous $z_1, z_2, z_3, z_4 \geq 0$, $-z_1 + z_2 - z_3 - z_4 = 1$

Définition 3.1.5. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $m \leq n$. La matrice A est **pleine** si son rang est m . Si le rang de A est strictement inférieur à m , elle est dite **déficiente**.

Proposition 3.1.6. Si le système $Ax = b$ est compatible, alors il existe une matrice pleine $\tilde{A}$ et un $\tilde{b}$ tels que :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{A}x = \tilde{b}\}$$

Démonstration. On réalise une récurrence sur m , le nombre de lignes de A .

- $m = 1$:
Si le rang de A est 1, on prend $\tilde{A} = A$ et $\tilde{b} = b$
Si le rang de A est nul, on prend $\tilde{A} = 0$ et $\tilde{b} = 0$
- Supposons le résultat vrai au rang $(m - 1)$ et montrons qu'il l'est au rang m .
Si A est pleine, on prend $\tilde{A} = A$ et $\tilde{b} = b$.
Si A est déficiente, alors il existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tel que $l^j(A) = \sum_{k \neq j} \lambda_k l^k(A)$, d'où $b_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k b_k$ (par compatibilité du système) où $l^j(A)$ désigne la j -ième ligne de la matrice A .
La matrice $\tilde{A}$ obtenue en privant A de j -ième ligne et le vecteur $\tilde{b}$ obtenu en privant b de b_j satisfont $\tilde{A}x = \tilde{b}$, alors que $\tilde{A}$ a $(m - 1)$ lignes. On peut donc remplacer $\tilde{A}$ (donc A) par une matrice pleine.

□

Géométriquement, une (PL-P) est interprétée et peut être définie comme l'intersection de deux sous-espaces affines.

Une programmation linéaire est convexe ; en effet, il s'agit de l'intersection de deux convexes.

Définition 3.1.7. Un ensemble défini par un nombre fini d'inéquations ou d'équations linéaires est appelé **polyèdre**

Remarque 3.1.8. 1. Le polyèdre est une généralisation de la programmation linéaire.

2. Il est toujours convexe.

On peut restreindre l'étude de cet objet à des bornés de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.1.9. • Un **polytope** $\mathcal{P}$ est un polyèdre borné. Il est de la forme

$$\mathcal{P} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

où A est une matrice de rang $m < n$.

- $x \in \mathbb{R}^n$ est un **sommet** de $\mathcal{P}$ si et seulement si $x \in \mathcal{P}$ et il n'existe pas $y, z \in \mathcal{P}$ avec $y \neq z$ et $x \in (y, z)$
- Une **base** de A (A de rang $m < n$), est une partie $\mathcal{B} = \{j_1, \dots, j_m\} \subset \{1, \dots, n\}$ telle que les colonnes d'indices $j_1, \dots, j_m$ de A soient libres, ce qui équivaut à : la matrice carrée $\mathcal{B}$ formée avec les lignes de A et les colonnes d'indices $j_1, \dots, j_m$ de A est inversible.

Exemple 3.1.10. On considère le problème de linéaire suivant :

$$\longrightarrow \text{Minimiser } x_1 - 8x_2 \text{ contraint à } \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

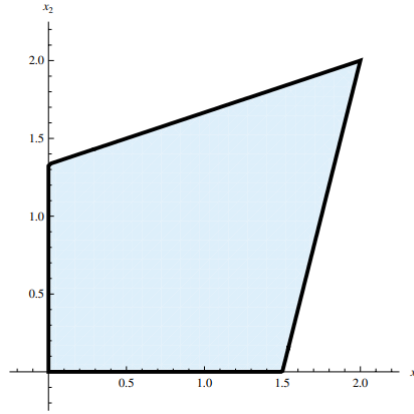


FIGURE 3.1 – Représentation de l'équation

On remarque ici que $n = 4$, $m = 2$

$$c^T = (1, -8, 0, 0), \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4} \quad b = (4, 6)^T$$

Des bases sont $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 3\}$. L'ensemble constitue un polyèdre de dimension 2 après projection sur le (x_1, x_2) -plan qui est représenté ci-dessus dont la solution optimale est située en l'un des 4 sommets de $\mathcal{P}$ pour $x^* = (2, 2, 0, 0)$, avec un coût optimal $p^* = -14$.

Remarque 3.1.11. • En considérant la base $\mathcal{B} = \{1, 3\}$, on note $A \rightsquigarrow (B \mid N)$ avec

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $x_B = (x_1, x_3)$, $x_N = (x_2, x_4)$.

- Le fait que la solution optimale soit un sommet n'est pas une coïncidence ; en effet, nous allons voir qu'il s'agit d'une condition nécessaire.

Définition 3.1.12. Soit A une matrice de rang m , $\mathcal{B}$ une base de A et $A \rightsquigarrow (B \mid N)$ la décomposition de A associée à $\mathcal{B}$.

- La **solution de base associée à $\mathcal{B}$** et au système $Ax = b$ est $x \rightsquigarrow (x_B, 0)$ avec x_B la seule solution de $Bx_B = b$, noté $x^{\mathcal{B}}$. Autrement dit, c'est l'unique solution de $Ax = b$ telle que $x_N = 0$.
- La solution de base x est **admissible** si et seulement si $x_B \geq 0$, autrement dit, si et seulement si $x \in \mathcal{P}$
- La base $\mathcal{B}$ est dite **admissible** si et seulement si $x^{\mathcal{B}}$ est admissible

Théorème 3.1.13. Soit $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ un polytope convexe standard (i.e. A est de rang m), alors x est un sommet de $\mathcal{P}$ si et seulement si x est une solution de base admissible pour une certaine base $\mathcal{B}$ de A .

Démonstration. Supposons que x soit un sommet de $\mathcal{P}$, alors après permutation, $A \rightsquigarrow (C \mid M)$, avec $x_C > 0$ et $x_M = 0$. Soit w solution de $Cw = 0$. Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on $x_C \pm \epsilon w > 0$ et $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, avec $y \rightsquigarrow (x_C - \epsilon w, 0)$, $z \rightsquigarrow (x_C + \epsilon w, 0)$. Comme $y, z \in \mathcal{P}$, on doit avoir $y = z$, d'où $w = 0$.

Ainsi C est injective, en particulier ses colonnes forment une famille libre. On complète C à une matrice carrée B , extraite de A et de même rang que celui de A . B correspond alors à une base $\mathcal{B}$ de A . Avec $A \rightsquigarrow (B \mid N)$, on a $x_N = 0$, d'où x est la solution de base associée à $\mathcal{B}$.

Réciproquement, si x est une solution de base admissible pour une certaine base $\mathcal{B}$ de A et si $y, z \in \mathcal{P}$ et $t \in]0, 1[$ sont tels que $x = (1 - t)y + tz$, alors on a

$$x_B = (1 - t)y_B + tz_B \text{ et } x_N = (1 - t)y_N + tz_N$$

Comme $y_N, z_N \geq 0$, on a $y_N = z_N = 0$.

De plus, comme $Ax = Ay = Az = b$, on a $Bx_B = By_B = Bz_B = b$, d'où $x_B = y_B = z_B$, ce qui implique $x = y = z$. $\square$

3.1.2 Recherche d'un optimum

Un résultat important de l'optimisation linéaire est le suivant

Théorème 3.1.14. *On considère le (PLS) suivant : $\min_{\substack{Ax=b \\ x \geq 0}} c^T x$.*

S'il existe une solution x du (PLS), alors il existe une solution y du (PLS) qui soit, de plus, un sommet de $\mathcal{P}$.

Démonstration. Soit $y \in \mathcal{P}$ une solution du (PLS) qui a le moins de coordonnées strictement positives parmi les solutions de ce dernier. Soit $A \sim (C \mid M)$, $y \sim (y_C, y_M)$, avec $y_C > 0$ et $y_M = 0$.

Soit w une solution de $Cw = 0$. D'abord, on a $c_C w = 0$ (*). En effet, si $z \sim (y_C \pm \epsilon w, 0)$, alors z est admissible pour ϵ petit. y étant optimal, on trouve $\pm \epsilon c_C w \geq 0$, d'où $c_C w = 0$.

Voyons que $w = 0$. Par l'absurde, supposons que $w \neq 0$, on peut alors supposer $w_1 > 0$. Soit $\epsilon := \min_{w_j > 0} \frac{x_j}{w_j} > 0$.

Soit $z \sim \epsilon(w, 0)$ et soit $x := y - z$. Alors $x \geq 0$, $x_M = 0$ et $x_C \not\geq 0$. Par ailleurs, $Ax = C_{x_C} + M_{x_M} = A_y - C_z = A_y = b$. Donc x est une solution du (PLS) ayant moins de coordonnées strictement positives que y . Par ailleurs, $cx = cy$ par (*), d'où x optimal $\rightarrow$ c'est une contradiction. $\square$

Recherche naïve d'un optimum

On suppose l'existence d'une solution du (PLS), l'algorithme suivant permet de trouver le minimum :

Algorithme :

1. Initialisation $z = \infty$
2. On considère toutes les parties de m éléments $\mathcal{B} \subset \{1, \dots, n\}$
3. On vérifie si la matrice B associée à $\mathcal{B}$ est inversible
 - Sinon, on passe au $\mathcal{B}$ suivant.
 - Si oui, on calcule $x_B := B^{-1}b$
4.
 - Si $x_B \not\geq 0$, on passe au $\mathcal{B}$ suivant
 - Sinon, on remplace z par $\min\{z, c_b x_b\}$, où $c \sim (c_B, c_N)$
5. Afficher $z \rightarrow$ minimum du (PLS)

Remarque 3.1.15. • Cet algorithme, bien que fiable, possède un nombre prohibitif de calculs : en effet, il y a $\binom{n}{m}$ parties $\mathcal{B}$ à regarder, résolution de $Bx_B = b$ pour chaque base

- On peut obtenir un z fini même si l'infimum du (PLS) vaut $-\infty \rightarrow$ contre-intuitif. Par exemple, pour le (PLS) définit par

$$\min_{\substack{x_1=1 \\ x_1, x_2 \geq 0}} (x_1 - x_2),$$

on a $z = 1$ bien que l'infimum soit $-\infty$.

Exemple 3.1.16. En reprenant l'exemple, en appliquant l'algorithme on retrouve le coût optimal $p^* = 14$.

3.1.3 Dualité

L'une des plus remarquables et utiles caractéristiques de la programmation linéaire est qu'à chaque problème de PL, on peut lui associer son problème "dual" qui est également un problème de PL.

Définition 3.1.17. Soit PL une programmation linéaire définie par

$$\begin{cases} \min & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

On peut lui associer son **dual** qui, pour le cas de l'équation est :

$$\begin{cases} \max & b^T y \\ \text{s.c.} & A^T y \leq c \end{cases} \quad (3.4)$$

On reprend l'exemple du problème linéaire (2.3).
Son dual correspondant est :

$$\rightarrow \text{Maximiser } 4y_1 + 6y_2 \text{ contraint à } \begin{cases} -y_1 + 4y_2 \leq 1 \\ 3y_1 - y_2 \leq -8 \\ y_1 \leq 0 \\ y_2 \leq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

L'ensemble dual réalisable (y_1, y_2) est présenté ci-dessous dans la même figure, avec une solution

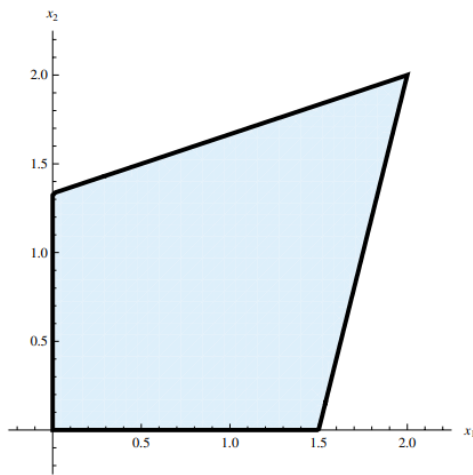


FIGURE 3.2 – Représentation de LP

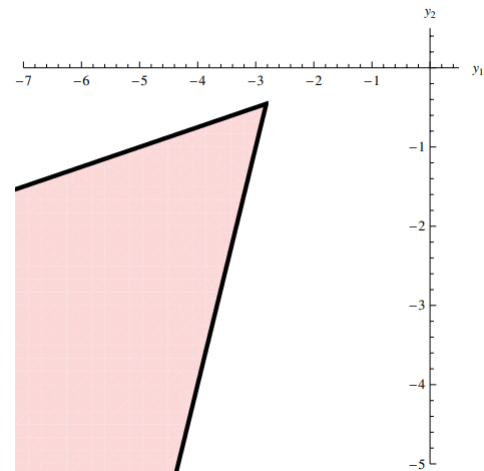


FIGURE 3.3 – Représentation de LP-D

optimale $y^* = \left(-\frac{31}{11}, -\frac{5}{11}\right)$ et un coût optimal $d^* = -14$. On a, pour cet exemple $p^* = d^* = -14$. On peut essayer de dualiser d'autres types de problèmes. Déterminons le dual du problème

$$\begin{aligned} \max & z = c^T x, \\ & Ax \leq b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Il suffit de réécrire le problème sous la forme d'une minimisation :

$$\begin{aligned} -\min & z = -c^T x, \\ & -Ax \geq -b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, le dual sera :

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y, \\ & A^T y \geq c, \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Proposition 3.1.18. *Le dual du dual est le primal.*

Démonstration. On considère le problème primal

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x, \\ & Ax \geq b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Par définition, son dual est

$$\begin{aligned} \max \quad & z = b^T y, \\ & A^T y \leq c, \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

En appliquant le résultat vu ci-dessus sur ce type de problème on obtient que le dual est :

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x, \\ & (A^T)^T x \geq b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x, \\ & Ax \geq b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

□

On a vu dans l'exemple précédent que la valeur minimale du primal coïncidait avec la valeur maximale du dual. Il s'agit en fait d'une égalité dans le cadre général.

Théorème 3.1.19. (*Dualité (version faible)*)

Si $Ax \geq b$, $x \geq 0$ et $A^T y \leq c$, $y \geq 0$, alors

$$b^T y \leq c^T x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+$$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$, alors

$$c^T x = x^T c \geq x^T A^T y = (Ax)^T y = y^T Ax \geq y^T b = b^T y$$

□

En reprenant l'exemple du début, le point $y = (y_1, y_2)$ avec $y_1 = -\frac{31}{11}$ et $y_2 = -\frac{5}{11}$ vérifie les contraintes. On a bien :

$$b^T y = 4y_1 + 6y_2 = -\frac{160}{11} \leq -14 = c^T x$$

pour le sommet $x = (2, 2, 0, 0)$ satisfaisant $Ax \geq b$ et $x \geq 0$.

Le théorème faible de la dualité nous implique

$$b^T y \leq c^T x \implies b^T y \leq \min_x c^T x \implies \max_y b^T y \leq \min_x c^T x$$

En fait, on a même égalité avec ce résultat qui suit.

Théorème 3.1.20. (*Dualité (version forte)*)

On a l'égalité

$$\min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} c^T x = \max_{\substack{A^T y \leq b \\ y \geq 0}} b^T y$$

De plus, l'un des problèmes (primal ou dual) admet une solution si et seulement si l'autre problème admet aussi une solution.

Démonstration. La démonstration de ce résultat, bien que peu difficile, nécessite un minimum de connaissances concernant la théorie de la dualité. On pourra se référer à [12]. $\square$

3.2 Programmation Semi-Définie

L'optimisation semi-définie est une branche de l'optimisation convexe qui est d'un grand intérêt pratique. L'idée principale est de généraliser les programmes linéaires et les ensembles réalisables associés (polyèdres) au cas où les variables de décision sont des matrices symétriques, et les inégalités doivent être comprises comme des matrices semi-définies positives ($\mathcal{S}_n^{++}$).

On notera dans cette section " $\succeq$ " l'ordre partiel de Löwner rappelé dans les notations.

3.2.1 Définitions et formulation

Définition 3.2.1. Une *Inégalité Matricielle Linéaire (IML)* est de la forme

$$A_0 + \sum_{i=1}^m A_i x_i \succeq 0$$

où $A_i \in \mathcal{S}_n$, $i \in \{0, \dots, m\}$

Remarque 3.2.2. Un spectraèdre a un lien très fort avec IML. En effet il ne s'agit que d'un ensemble de points de $\mathbb{R}^n$ vérifiant une IML.

Exemple 3.2.3. Un nouvel exemple (classique) est celui de la courbe elliptique. On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble

$$\mathcal{T} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid A(x, y) := \begin{pmatrix} x+1 & 0 & y \\ 0 & 2 & -x-1 \\ y & -x-1 & 2 \end{pmatrix} \succeq 0 \right\} \quad (3.6)$$

Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(t) = t^3 + p_2 t^2 + p_1 t + p_0$$

avec

$$p_2 = -x - 5, \quad p_1 = -x^2 + 2x - y^2 + 7, \quad p_0 = -3 - x + x^3 + 3x^2 + 2y^2$$

En vertu du théorème de caractérisation des matrices symétriques semi-définies positives (6), la semi-définie positivité de $A(x, y)$ est équivalente aux conditions :

$$-p_2 = x + 5 \geq 0$$

$$p_1 = -x^2 + 2x - y^2 + 7 \geq 0$$

$$-p_0 = 3 + x - x^3 - 3x^2 - 2y^2 \geq 0$$

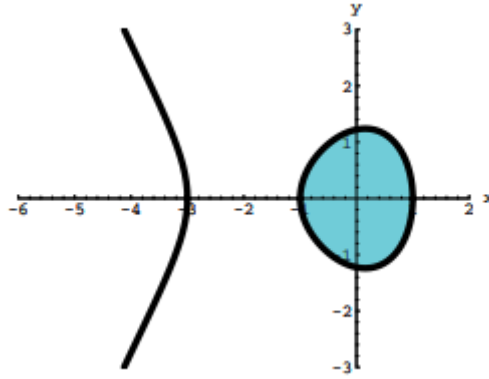


FIGURE 3.4 – Représentation de la courbe elliptique

Formulation des programmes primaires semi-définis

Définition 3.2.4. Un problème de **programmation semi-définie PSD** est écrit comme :

$$\begin{cases} \min & \langle C, X \rangle \\ \text{s.c.} & \langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & X \succeq 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

où $C, A_i \in \mathcal{S}_n$, et $\langle X, Y \rangle := \text{Tr}(X^T Y) = \sum_{ij} X_{ij} Y_{ij}$.

Remarque 3.2.5. • Les programmes semi-définis (PSD) sont des problèmes d'optimisation linéaire sur les spectraèdres.

- On notera dans la suite $\mathcal{A}X = b$ où $b \in \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathbb{R}^m$ tel que

$$\mathcal{A}X := \begin{pmatrix} \langle A_1, X \rangle_{tr} \\ \vdots \\ \langle A_m, X \rangle_{tr} \end{pmatrix}$$

- L'ensemble des matrices X satisfaisant les contraintes est un spectraèdre, par conséquent, il s'agit toujours d'un convexe (nous le démontrerons plus tard dans ce chapitre).
- Le (PL) :

$$\longrightarrow \text{Minimiser } c^T X \text{ contraint à } \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

est un cas particulier d'un (PSD) en définissant

$$X := \text{Diag}(x), \quad A_0 := \text{Diag}(c) \quad \text{et} \quad A_i := \text{Diag}(l_i(A)) \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

où $l_i(A)$ désigne la i -ième ligne de la matrice A

Par la remarque précédente, tout problème (PL) est un problème (PSD) où toutes les matrices A_i sont diagonales. Cependant, la réciproque est fautive. En effet, en voici un contre exemple :

Exemple 3.2.6. Considérons le problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \min & \frac{(c^T x)^2}{d^T x} \\ & Ax + b \geq 0 \end{cases}$$

où on suppose que $d^T x > 0$ si $Ax + b \geq 0$. Ce problème se reformule alors comme suit :

$$\begin{cases} \min & t \\ & Ax + b \geq 0 \\ & \frac{(c^T x)^2}{d^T x} \leq t \end{cases}$$

Il s'agit donc d'optimiser une fonction linéaire. Sous la contrainte $Ax + b \geq 0$ et $\frac{(c^T x)^2}{d^T x} \leq t$, on a l'équivalence :

$$\begin{aligned} \frac{(c^T x)^2}{d^T x} \leq t &\iff \begin{bmatrix} t & c^T x \\ c^T x & d^T x \end{bmatrix} \succeq 0 \quad \text{si } d^T x \geq 0 \\ &\iff t \geq 0, \quad d^T x \geq 0 \quad \text{et} \quad td^T x \geq (c^T x)^2 \end{aligned}$$

On obtient ainsi le (PSD) suivant :

$$\begin{cases} \min & t \\ & d^T x \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} \text{Diag}(Ax + b) & 0 & 0 \\ 0 & t & c^T x \\ 0 & c^T x & d^T x \end{bmatrix} \succeq 0 \end{cases}$$

Ainsi, la classe des problèmes (PSD) est beaucoup plus large que la classe des problèmes linéaires (PL).

Cependant, contrairement à la programmation linéaire, l'ensemble des solutions n'est pas en général polyédral.

Exemple 3.2.7. Considérons le problème PSD suivant :

$$\longrightarrow \text{Minimiser } 2x_{11} + 2x_{12} \quad \text{contraint à} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{22} = 1 \\ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} \succeq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Il s'agit clairement d'un PSD, avec $m = 1$ et

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = 1$$

Les contraintes sont satisfaites si et seulement si $x_{11}(1 - x_{11}) \geq x_{12}^2$ ce qui forme un disque fermé qui n'est pas polyédral. La solution optimale est égale à

$$X^* = \begin{bmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

avec un coût optimal $1 - \sqrt{2}$, qui n'est clairement pas rationnel.

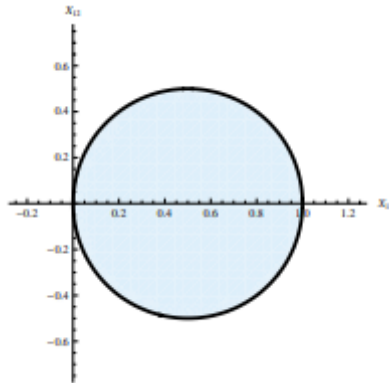


FIGURE 3.5 – Ensemble réalisable du problème PSD défini ci-dessus.

Remarque 3.2.8. Dans le cas particulier où $C = 0$, le problème de base est réduit à savoir si seulement les contraintes peuvent être satisfaites ou non pour une certaine matrice X .

3.2.2 Approche de la dualité (version faible)

Problème dual via la dualisation lagrangienne

De la même façon que dans le cas de l'optimisation linéaire, on peut associer à chaque PSD son dual. Pour ce faire, on a besoin de l'opérateur adjoint de $\mathcal{A} : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui est l'opérateur noté $\mathcal{A}^* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{S}_n$ vérifiant $\langle \mathcal{A}X, y \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle X, \mathcal{A}^*y \rangle_{tr}$ pour tout $X \in \mathcal{S}_n$ et tout $y \in \mathbb{R}^m$. Ainsi,

$$\langle X, \mathcal{A}^*y \rangle_{tr} = \langle \mathcal{A}X, y \rangle_{\mathbb{R}^m} = \sum_{i=1}^m y_i \text{Tr}(A_i, X) = \text{Tr} \left(X \sum_{i=1}^m y_i A_i \right) = \left\langle X, \sum_{i=1}^m y_i A_i \right\rangle_{tr}$$

ce qui donne

$$\mathcal{A}^*y := \sum_{i=1}^m y_i A_i \quad \forall y \in \mathbb{R}^m$$

La méthode la plus simple pour obtenir un dual de $(PSD - P)$ est d'utiliser la dualisation lagrangienne de sa contrainte d'égalité. Considérons alors la fonction lagrangienne

$$\mathcal{L}(X, y) := \langle C, X \rangle_{tr} + \langle y, b - \mathcal{A}X \rangle_{\mathbb{R}^m} \quad \forall X \in \mathcal{S}_n^+, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m$$

On associe à $(PSD - P)$ le problème d'optimisation

$$(PSD - D) \quad \max_{y \in \mathbb{R}^m} \min_{X \in \mathcal{S}_n^+} \mathcal{L}(X, y)$$

appelé problème dual de $(PSD - P)$ et la fonction $d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $d(y) := \min_{X \in \mathcal{S}_n^+} \mathcal{L}(X, y)$ est dite fonction duale. Il vient :

$$\begin{aligned} d(y) &= \min_{X \in \mathcal{S}_n^+} \mathcal{L}(X, y) \\ &= \min_{X \in \mathcal{S}_n^+} \left(\langle C, X \rangle_{tr} + \sum_{i=1}^m (b_i - \langle A_i, X \rangle_{tr}) y_i \right) \\ &= \min_{X \in \mathcal{S}_n^+} \langle C - \sum_{i=1}^m y_i A_i, X \rangle_{tr} + \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ &= \langle b, y \rangle_{\mathbb{R}^m} + \min_{X \in \mathcal{S}_n^+} \langle C - \mathcal{A}^*y, X \rangle_{tr}. \end{aligned}$$

En vertu des propriétés de $\mathcal{S}_n^+$,

$$\min_{X \in \mathcal{S}_n^+} \langle C - \mathcal{A}^*y, X \rangle_{tr} = \begin{cases} 0 & \text{si } C - \mathcal{A}^*y \succeq 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et le problème dual est alors

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} d(y) = \begin{cases} \max \langle b, y \rangle_{\mathbb{R}^m} & \text{si } C - \mathcal{A}^*y \succeq 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Suite à ces brèves explications, on peut définir le dual d'un $(PSD - P)$

Définition 3.2.9. On considère le PSD primal (PSD-P) :

$$\begin{cases} \min & \langle C, X \rangle \\ \text{s.c.} & \mathcal{A}X = b, \quad b \in \mathbb{R}^m \\ & X \succeq 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

où $C, A_i \in \mathcal{S}_n$, et $\langle X, Y \rangle := \text{Tr}(X^T Y) = \sum_{ij} X_{ij} Y_{ij}$.

Son dual, noté (PSD-D) est :

$$\begin{cases} \max & b^T y \\ \text{s.c.} & \mathcal{A}^* y + Z = C \\ & y \in \mathbb{R}^m, \quad Z \succeq 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

où $b = (b_1, \dots, b_m)$, et $y = (y_1, \dots, y_m)$ sont les variables.

Proposition 3.2.10. Un programme semi-défini est convexe.

Démonstration. La fonction qu'on cherche à minimiser étant linéaire, elle est convexe. Ceci permet de voir que démontrer qu'un programme semi-défini est convexe revient à démontrer que l'ensemble $A = \{X \in \mathcal{S}_n^+ \mid \mathcal{A}X = b\}$ l'est.

On se donne $X_1, X_2 \in A$ et $\lambda \in [0, 1]$. Par convexité de $\mathcal{S}_n^+$, il est clair que $X_1 + (1 - \lambda)X_2 \in \mathcal{S}_n^+$. Par conséquent, les propriétés du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{tr}$ nous donnent :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) &= \begin{pmatrix} \langle A_1, \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2 \rangle_{tr} \\ \vdots \\ \langle A_m, \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2 \rangle_{tr} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \langle A_1, X_1 \rangle_{tr} + (1 - \lambda) \langle A_1, X_2 \rangle_{tr} \\ \vdots \\ \lambda \langle A_m, X_1 \rangle_{tr} + (1 - \lambda) \langle A_m, X_2 \rangle_{tr} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_1 \\ \vdots \\ \lambda b_m + (1 - \lambda)b_m \end{pmatrix} = b. \end{aligned}$$

D'où la convexité du domaine de contraintes. □

Exemple 3.2.11. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \min & x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 9x_{22} + 7x_{33} \\ \text{s.c.} & x_{11} + 2x_{13} + 3x_{22} + 14x_{23} + 5x_{33} = 11 \\ & 4x_{12} + 16x_{13} + 6x_{22} + 4x_{33} = 19 \\ & X \succeq 0 \end{cases}$$

qui est un programme semi-défini avec ici

$$b = (11, 19)^T \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 2 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

et

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_3^+$$

Le dual de ce dernier peut s'écrire, par définition, sous la forme suivante

$$\begin{cases} \max & 11y_1 + 19y_2 \\ \text{s.c.} & y_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 2 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \end{bmatrix} + Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \\ & Z \succeq 0 \end{cases}$$

On peut réécrire ce problème sous la forme

$$\begin{cases} \max & 11y_1 + 19y_2 \\ \text{s.c.} & \begin{bmatrix} 1 - y_1 & 2 - 2y_2 & 3 - y_1 - 8y_2 \\ 2 - 2y_2 & 9 - 3y_1 - 6y_2 & -7y_1 \\ 3 - y_1 - 8y_2 & -7y_1 & 7 - 5y_1 - 4y_2 \end{bmatrix} \succeq 0 \end{cases}$$

Définition 3.2.12. • La valeur optimale du problème (PSD-P) est

$$\tilde{p} := v(\text{PSD} - P) = \inf\{\langle C, X \rangle_{\text{tr}} \mid AX = b \text{ et } X \succeq 0\}$$

et

$$\mathcal{R}_{\text{PSD}-P} := \{X \in \mathcal{S}_n^+ \mid AX = b\}$$

est l'ensemble des matrices admissibles (ou solution réalisable primale) de (PSD-P).

- L'ensemble des solutions optimales (primales) du (PSD-P) est noté $\mathcal{S}_{\text{PSD}-P}$. Ainsi $\tilde{X}$ est une solution optimale primale ($\tilde{X} \in \mathcal{S}_{\text{PSD}}$) si $\tilde{X} \in \mathcal{R}_{\text{PSD}}$ et

$$\langle C, \tilde{X} \rangle_{\text{tr}} = \tilde{p}$$

- La valeur optimale du problème (PSD-D) est

$$\tilde{d} := v(\text{PSD} - D) = \sup\{\langle b, y \rangle_{\mathbb{R}^m} \mid A^*y + Z = C \text{ et } (y, Z) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}_n^+\}$$

et

$$\mathcal{R}_{\text{PSD}-D} = \{(y, Z) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}_n^+ \mid A^*y + Z = C\}$$

est l'ensemble des solutions admissibles (ou réalisables duales) du (PSD - D).

- L'ensemble $\mathcal{S}_{\text{PSD}-D}$ est l'ensemble des solutions optimales (duales) du (PSD-D). Ainsi $(\tilde{y}, \tilde{Z})$ est une solution optimale duale $((\tilde{y}, \tilde{Z}) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}_n^+)$ si $(\tilde{y}, \tilde{Z}) \in \mathcal{R}_{\text{PSD}-D}$ et

$$\langle b, \tilde{y} \rangle_{\mathbb{R}^m} = \tilde{d}$$

Remarque 3.2.13. Le problème dual est un problème de programmation semi-définie (donc convexe). Et une solution optimale duale de (PSD-D) est un couple $(\tilde{y}, \tilde{Z}) \in \mathcal{R}_D$ tel que

$$\langle b, \tilde{y} \rangle_{\mathbb{R}^m} = \tilde{d}$$

On retrouve les théorèmes de la dualité vus dans le cas particulier de la programmation linéaire.

Proposition 3.2.14. (Dualité faible)

Soient X une solution réalisable primale de (PSD-P) et (y, Z) une solution réalisable duale de (PSD-D). Alors

$$\langle C, X \rangle_{tr} - \langle b, y \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle X, Z \rangle_{tr} \geq 0$$

Et si $\langle X, Z \rangle_{tr} = 0$ alors $X \in \mathcal{S}_{PSD-P}$ et $(y, Z) \in \mathcal{S}_{PSD-D}$.

Autrement dit, la valeur de chaque solution réalisable primale est plus grande ou égale à la valeur de chaque solution réalisable duale.

Démonstration. On a, pour tous $C \in \mathcal{S}_n$ et $y \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} \langle C, X \rangle_{tr} - \langle b, y \rangle_{\mathbb{R}^m} &= \left\langle \sum_{i=1}^m y_i A_i + Z, X \right\rangle_{tr} - \langle b, y \rangle_{\mathbb{R}^m} \\ &= \sum_{i=1}^m \langle A_i, X \rangle_{tr} y_i + \langle Z, X \rangle_{tr} - \langle b, y \rangle_{\mathbb{R}^m} \\ &= \sum_{i=1}^m b_i y_i + \langle Z, X \rangle_{tr} - \langle b, y \rangle_{\mathbb{R}^m} \\ &= \langle Z, X \rangle_{tr} = \langle X, Z \rangle_{tr} \geq 0 \end{aligned}$$

car $X, Z \in \mathcal{S}_n^+$.

D'autre part, si $\langle X, Z \rangle_{tr} = 0$ avec $X \in \mathcal{R}_{PSD-P}$ et $(y, Z) \in \mathcal{R}_{PSD-D}$, alors

$$\langle C, X \rangle_{tr} = \langle b, y \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

Et comme

$$\langle b, y \rangle_{\mathbb{R}^m} \leq v(PSD - D) \leq v(PSD - P) \leq \langle C, X \rangle_{tr}$$

on obtient alors que

$$v(PSD - D) = v(PSD - P) = \langle C, X \rangle_{tr} = \langle b, y \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

On a ainsi montré que $X \in \mathcal{S}_{PSD-P}$ et $(y, Z) \in \mathcal{S}_{PSD-D}$. □

Définition 3.2.15. La différence $\langle C, X \rangle_{tr} - \langle b, y \rangle_{\mathbb{R}^m} \geq 0$ est appelée **saut** (ou **écart**) de dualité.

3.2.3 Dualité forte

Avant d'aborder le théorème essentiel et les résultats qui en découlent, on a besoin d'un résultat préliminaire. On note, pour $M \in \mathcal{S}_n^+$, $\lambda_{\min}(M)$ la plus petite valeur propre de M et $\lambda_{\max}(M)$ la plus grande valeur propre de M .

Lemme 3.2.16. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+$. Alors

$$\lambda_{\min}(A)\lambda_{\max}(B) \leq \lambda_{\min}(A)Tr(B) \leq \langle A, B \rangle_{tr} \leq \lambda_{\max}(A)Tr(B) \leq n\lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B)$$

Démonstration. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+$, la décomposition spectrale de A donne l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{O}_n$ telle que $A = PDP^T$ avec $D \in \mathcal{M}_n$ diagonale et $PP^T = I_n$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle_{tr} &= Tr(AB) \\ &= Tr(PDP^T B) = Tr(DP^T BP) \\ &\geq \lambda_{\min}(A)Tr(P^T BP) = \lambda_{\min}(A)Tr(B) \\ &\geq \lambda_{\min}(A)\lambda_{\max}(B) \end{aligned}$$

On montre de la même façon

$$\langle A, B \rangle_{tr} \leq \lambda_{\max}(A) \text{Tr}(B) \leq n \lambda_{\max}(A) \lambda_{\max}(B)$$

En utilisant le fait que la trace est un invariant de similitude, on a

$$\lambda_{\min}(A) \leq \text{Tr}(A) \leq n \lambda_{\max}(A)$$

□

On considère l'ensemble

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}_n^+) := \{\mathcal{A}X \mid X \succeq 0\}$$

avec $\mathcal{A} : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un opérateur linéaire. Il est clair que cet ensemble est un cône convexe comme image d'un cône convexe par un opérateur linéaire. Cependant, il n'est pas nécessairement fermé. L'exemple suivant permet de nous convaincre.

Exemple 3.2.17. Soit $\mathcal{A} : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire définie par

$$\mathcal{A}X := \begin{bmatrix} x - y \\ z - y \end{bmatrix} \quad \forall X := \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_2$$

On a

$$\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_2 \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ z \geq 0 \\ xz \geq y^2 \end{cases}$$

Alors

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}_2^+) = \{(0, 0)\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u + v > 0\}$$

En effet, il est évident que $(0, 0) \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_2)$ (prendre $X = 0$). Si $(s, t) \neq (0, 0) \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_2)$, il existe donc

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \text{ tel que } \begin{cases} s = x - y \\ t = z - y \end{cases} \text{ avec } x, z \geq 0 \text{ et } xz \geq y^2.$$

Alors

$$\begin{aligned} s + t &= x + z - 2y \\ &\geq x + z - 2\sqrt{xz} \\ &= (\sqrt{x} - \sqrt{z})^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

Réciproquement, $(0, 0) \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_2^+)$ (prendre l'antécédent $X = 0$). Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u + v > 0$, alors $(u, v) \neq (0, 0)$. Pour $X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$, on pose $\begin{cases} u = x - y \\ v = z - y \end{cases}$ alors $u + v > 0$ donc $(u, v) \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_2^+)$. Mais $\mathcal{A}(\mathcal{S}_2^+)$ n'est clairement pas fermé. En effet, soit $(u_n, v_n) = (1 + \frac{1}{n}, -1 - \frac{1}{2n})$. Les éléments de la suite appartiennent à $\mathcal{A}(\mathcal{S}_2^+)$ bien que $(u_n, v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (1, -1) \notin \mathcal{A}(\mathcal{S}_2^+)^{\text{cl}}$

Cependant, une condition suffisante pour que $\mathcal{A}(\mathcal{S}_n^+)$ soit fermé est donnée par le résultat qui suit.

Lemme 3.2.18. Supposons qu'il existe $y \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\mathcal{A}^* y = \sum_{i=1}^m y_i \mathcal{A}_i \succ 0$$

Alors $\mathcal{A}(\mathcal{S}_n^+)$ est fermé.

Démonstration. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices symétriques semi-définies positives telle que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \mathcal{A}X_i = b$$

La continuité du produit scalaire nous assure

$$\langle y, \mathcal{A}X_i \rangle_{\mathbb{R}^m} \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \langle y, b \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

Le lemme précédent implique

$$\langle y, \mathcal{A}X_i \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle \mathcal{A}^*y, X_i \rangle_{tr} \geq \lambda_{\min}(\mathcal{A}^*y) \lambda_{\max}(X_i)$$

ce qui montre que la suite $(\lambda_{\max}(X_i))_{i \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Par ailleurs

$$\|X_i\|_{tr} = \max_{j=1, \dots, n} \lambda_j(X_i) = \lambda_{\max}(X_i)$$

Donc $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $\mathcal{S}_n$. Comme ce dernier est de dimension finie, il existe une sous-suite $(X_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $X_{i_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \tilde{X}$. Or $X_i \in \mathcal{S}_n^+$ est fermé donc $\tilde{X} \succeq 0$ et $\mathcal{A}\tilde{X} = b$.

Ceci conclut la preuve. $\square$

Lemme 3.2.19. (Lemme de Farkas)

Supposons qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que $\mathcal{A}^*y_0 \succ 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une matrice $X \succeq 0$ telle que $\mathcal{A}X = b$ (i.e. $\mathcal{R}_{PSD-P} \neq \emptyset$).
2. $b^T y \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^m$ tel que $\mathcal{A}^*y \succeq 0$.

Démonstration. (1) $\implies$ (2) Si $\mathcal{A}X = b$ pour un certain $X \succeq 0$, alors

$$b^T y = (\mathcal{A}X)^T y = \langle \mathcal{A}X, y \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle \mathcal{A}^*y, X \rangle_{tr} \geq 0.$$

(2) $\implies$ (1) Par contraposée, supposons que pour toute matrice $X \succeq 0$, $\mathcal{A}X \neq b$, i.e. le système

$$\begin{cases} \mathcal{A}X = b \\ X \succeq 0 \end{cases}$$

n'admet pas de solution ($\mathcal{R}_{PSD-P} = \emptyset$). Alors $b \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_n^+)^c$. Mais comme $\mathcal{A}(\mathcal{S}_n^+)$ est un convexe fermé (lemme précédent), le théorème de séparation assure l'existence d'un vecteur $y_1 \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\langle b, y_1 \rangle_{\mathbb{R}^m} < 0 \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{A}X, y_1 \rangle_{\mathbb{R}^m} \geq 0 \quad \forall X \succeq 0$$

Donc $\langle X, \mathcal{A}^*y_1 \rangle_{tr} \geq 0 \quad \forall X \succeq 0$ avec $b^T y_1 < 0$. Le théorème de Fejér assure donc que $\mathcal{A}^*y_1 \succeq 0$. $\square$

Nous sommes désormais en mesure de démontrer le théorème capital de cette section. Rappelons que $\tilde{p} := v(PSD - P) = \inf\{\langle C, X \rangle_{tr} \mid \mathcal{A}X = b \text{ et } X \succeq 0\}$ et $\tilde{d} := v(PSD - D) = \sup\{\langle b, y \rangle_{\mathbb{R}^m} \mid \mathcal{A}^*y + Z = C \text{ et } (y, Z) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{S}_n^+\}$.

Définition 3.2.20. • Le système

$$\begin{cases} \mathcal{A}X = b \\ X \succeq 0 \end{cases}$$

est dit **strictement réalisable** si

$$b \in \text{Int}(\mathcal{A}(S_n^+))$$

Dans ce cas, un point X sera dit **strictement réalisable** pour $(PSD - P)$ si $X \in \mathcal{R}_{PSD-P}^\circ := \{X \in S_n^{++} \mid Ax = b\}$.

• Le système

$$\begin{cases} \mathcal{A}^*y + Z = C \\ y \in \mathbb{R}^m \\ Z \succeq 0 \end{cases}$$

est dit **strictement réalisable** si

$$C \in \text{Int}(\mathcal{A}^*(\mathbb{R}^m) + S_n^+)$$

Dans ce cas, un point (y, Z) sera dit **strictement réalisable** pour $(PSD - D)$ si $(y, Z) \in \mathcal{R}_{PSD-D}^\circ := \{(y, Z) \in \mathbb{R}^m \times S_n^{++} \mid \mathcal{A}^*y + Z = C\}$.

Théorème 3.2.21. (Dualité forte)

Supposons qu'il existe $y \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\mathcal{A}^*y = \sum_{i=1}^m y_i A_i \succ 0$$

Alors $\tilde{p} = \tilde{d}$. Si de plus l'une des valeurs est finie, alors cette valeur est atteinte.

Démonstration. Distinguons les différents cas selon les valeurs de $\tilde{p}$ et $\tilde{d}$.

- Si $\tilde{p} = -\infty$, alors par la dualité faible, $\tilde{d} = -\infty$
- Si $\tilde{d} = +\infty$, alors par la dualité faible, $\tilde{p} = +\infty$
- Si $\tilde{p} = +\infty$, i.e. $\mathcal{R}_{PSD-P} = \emptyset$. Par le lemme de Farkas, il existe $y_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\langle b, y_0 \rangle_{\mathbb{R}^m} > 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}^*y_0 \preceq 0$$

Donc $\tilde{d} = +\infty$. En effet, soit $(y, Z) \in \mathcal{R}_{PSD-D}$, alors $Z = C - \mathcal{A}^*y \succeq 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$y_n := y + ny_0 \quad \text{et} \quad Z_n := C - \mathcal{A}^*y_n$$

Alors $(y_n, Z_n) \in \mathcal{R}_{PSD-D}$ pour tout entier n et

$$\langle b, y + ny_0 \rangle_{\mathbb{R}^m} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

d'où $\tilde{d} = +\infty$. On montre de la même manière que si $\tilde{d} = -\infty$, alors $\tilde{p} = -\infty$.

- Supposons désormais $\tilde{p}$ et $\tilde{d}$ sont finies avec $\tilde{d} < \tilde{p}$. Alors le système

$$\begin{cases} \langle C, X \rangle_{tr} = \tilde{d} \\ \mathcal{A}X = b \\ X \succeq 0 \end{cases}$$

n'admet pas de solution. Ainsi, par le lemme de Farkas, il existe $(y_0, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ tel que

$$y_0 C + \mathcal{A}^*y \succeq 0 \quad \text{et} \quad \tilde{d}y_0 + b^T y < 0$$

On distingue alors trois cas :

1. Si $y_0 = 0$, alors $\mathcal{A}^*y \succeq$ et $b^T y < 0$. Le lemme de Farkas stipule la non existence de solution pour le système

$$\begin{cases} \mathcal{A}X = b \\ X \succeq 0 \end{cases}$$

donc $\mathcal{R}_{PSD-P} = \emptyset$

2. Si $y_0 > 0$, alors

$$C - \mathcal{A}^* \left(-\frac{y}{y_0} \right) \succeq 0 \quad \text{et} \quad \tilde{d} - b^T \left(-\frac{y}{y_0} \right) < 0$$

donc $\tilde{d}$ n'est pas la valeur optimale. C'est une contradiction.

3. Si $y_0 < 0$, alors

$$-C + \mathcal{A}^* \left(-\frac{y}{y_0} \right) \succeq 0 \quad \text{et} \quad -\tilde{d} + b^T \left(-\frac{y}{y_0} \right) < 0$$

Comme l'inégalité est stricte, il existe un certain $\epsilon > 0$ tel que

$$-C + \mathcal{A}^* \left(-\frac{y}{y_0} \right) \succeq 0 \quad \text{et} \quad -\tilde{d} + b^T \left(-\frac{y}{y_0} \right) < -\epsilon \quad (3.11)$$

L'inégalité étant stricte, il existe $\tilde{y}$ tel que :

$$C - \mathcal{A}^*(\tilde{y}) \succeq 0 \quad \text{et} \quad \tilde{d} - b^T(\tilde{y}) < \epsilon \quad (3.12)$$

En sommant 3.11 et 3.12, on obtient :

$$\mathcal{A}^* \left(-\frac{y}{y_0} - \tilde{y} \right) \succeq 0 \quad \text{et} \quad b^T \left(-\frac{y}{y_0} - \tilde{y} \right) < 0$$

De nouveau, par le lemme de Farkas, $\mathcal{R}_{PSD-P} = \emptyset$ d'où $\tilde{p} = -\infty$. C'est une contradiction.

Dans tous les cas, $\tilde{d} \geq \tilde{p}$. La dualité faible permet de conclure l'égalité.

Donc $\tilde{p} = \tilde{d}$.

Supposons que $\tilde{p}$ ou $\tilde{d}$ est finie alors cette valeur est atteinte, i.e.,

$$\exists \tilde{X} \in \mathcal{R}_{PSD-P} \quad \text{et} \quad \exists(\tilde{y}, \tilde{Z}) \in \mathcal{R}_{PSD-P} \quad \text{tels que}$$

$$\tilde{p} = \langle C, \tilde{X} \rangle_{tr} = \langle b, \tilde{y} \rangle_{\mathbb{R}^m} = \tilde{d}$$

□

De la même façon, on a le résultat suivant :

Théorème 3.2.22. *Supposons que l'une des deux assertions soit vérifié :*

1. $\mathcal{R}_{PSD-P}^\circ \neq \emptyset$

2. $\mathcal{R}_{PSD-D}^\circ \neq \emptyset$

Alors $\tilde{p} = \tilde{d}$. De plus, si l'une des des valeurs est finie alors cette valeur est atteinte.

3.2.4 Existence de solutions

On a vu le lien fort qui réside entre un problème (PSD) et son dual. Mais pouvons-nous affirmer à tous les coups que ces solutions existent ? (i.e. quand est-ce que l'ensemble des solutions primales est non vide et bornée ?) Le résultat qui suit nous permet d'assurer cette existence sous certaines hypothèses.

Proposition 3.2.23. 1. Si $\mathcal{R}_{PSD-P} \times \mathcal{R}_{PSD-D}^\circ \neq \emptyset$, alors $\mathcal{S}_{PSD-P}$ est non vide et bornée. De plus,

$$v(PSD - P) = v(PSD - D)$$

2. Si $\mathcal{R}_{PSD-D} \times \mathcal{R}_{PSD-P}^\circ \neq \emptyset$ et $\mathcal{A}$ est surjective, alors $\mathcal{S}_{PSD-D}$ est non vide et borné. De plus,

$$v(PSD - P) = v(PSD - D)$$

3. Si $\mathcal{R}_{PSD-P}^\circ \times \mathcal{R}_{PSD-D}^\circ \neq \emptyset$ et $\mathcal{A}$ est surjective, alors $\mathcal{S}_{PSD-P}$ et $\mathcal{S}_{PSD-D}$ sont non vides bornés. De plus,

$$v(PSD - P) = v(PSD - D)$$

Démonstration. 1. Si $\mathcal{R}_{PSD-P} \times \mathcal{R}_{PSD-D}^\circ \neq \emptyset$, le théorème de la dualité forte implique directement $\tilde{d} = \tilde{p}$ et de plus, $\tilde{p}$ est finie. Cette valeur est donc atteinte, i.e.,

$$\exists \tilde{X} \in \mathcal{R}_{PSD-P} \text{ tq } \tilde{p} = \langle C, \tilde{X} \rangle_{tr}$$

ce qui prouve $\mathcal{S}_{PSD-P} \neq \emptyset$.

Voyons maintenant qu'il s'agit d'un ensemble borné. Supposons qu'il existe une solution (y, Z) strictement réalisable du programme dual, alors

$$Z := C - \mathcal{A}^*y \succ 0$$

Soit $X \in \mathcal{S}_{PSD-P}$. X est donc une solution du (PSD-P), d'où $\langle C, X \rangle_{tr} = \tilde{p} \leq \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \langle Z, X \rangle_{tr} &= \langle C - \mathcal{A}^*y, X \rangle_{tr} \\ &= \langle C, X \rangle_{tr} - \langle \mathcal{A}^*y, X \rangle_{tr} \\ &= \langle C, X \rangle_{tr} - b^T y \\ &\leq \alpha - b^T y \end{aligned}$$

Z étant supposé définie positive, on a

$$\lambda_{\min}(Z) > 0 \text{ et } Z \succ \lambda_{\min}(Z)I_n$$

D'où

$$\lambda_{\min}(Z) \langle X, I_n \rangle_{tr} \leq \langle Z, X \rangle_{tr} \leq \alpha - b^T y$$

Ainsi, on a

$$Tr(X) = \langle X, I_n \rangle_{tr} \leq \frac{\alpha - b^T y}{\lambda_{\min}(Z)}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|X\|_{tr} &\leq Tr(X) \\ &\leq \frac{\alpha - b^T y}{\lambda_{\min}(Z)} \end{aligned}$$

□

3.2.5 Conditions d'optimalité

Deux résultats sur les solutions optimales, qui découlent des résultats précédents, sont les suivants :

Théorème 3.2.24. *Supposons que $\mathcal{R}_{PSD-P} \times \mathcal{R}_{PSD-D} \neq \emptyset$ et que A est surjectif. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\tilde{X}$ et $(\tilde{y}, \tilde{Z})$ sont solutions optimales respectivement de $(PSD-P)$ et $(PSD-D)$.
2.
$$\begin{cases} \mathcal{A}\tilde{X} = b, & \tilde{X} \succeq 0 \\ \mathcal{A}^*\tilde{y} + \tilde{Z} = C, & \tilde{Z} \succeq 0 \\ \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle_{tr} = 0 \end{cases}$$

Démonstration. Si $\tilde{X}$ et $(\tilde{y}, \tilde{Z})$ sont respectivement solutions optimales pour $(PSD-P)$ et $(PSD-D)$, elles sont donc réalisables. Ainsi, on a

$$\langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle_{tr} = 0$$

Réciproquement, supposons qu'on a :

$$\begin{cases} \mathcal{A}\tilde{X} = b, & \tilde{X} \succeq 0 \\ \mathcal{A}^*\tilde{y} + \tilde{Z} = C, & \tilde{Z} \succeq 0 \\ \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle_{tr} = 0 \end{cases}$$

Alors la dualité faible implique clairement que $\tilde{X}$ et $(\tilde{y}, \tilde{Z})$ sont solutions optimales respectivement de $(PSD-P)$ et $(PSD-D)$. $\square$

Théorème 3.2.25. *Soient $\tilde{X} \in \mathcal{R}_{PSD-P}$ et $(\tilde{y}, \tilde{Z}) \in \mathcal{R}_{PSD-D}$ ayant un saut de dualité non nul, i.e.,*

$$\langle C, \tilde{X} \rangle_{tr} - \langle b, \tilde{y} \rangle_{\mathbb{R}^m} = 0$$

Alors $\tilde{X}$ et $(\tilde{y}, \tilde{Z})$ sont solutions optimale de $(PSD-P)$ et $(PSD-D)$ respectivement si et seulement si

$$\tilde{X}\tilde{Z} = 0$$

Démonstration. On a vu que

$$\langle C, \tilde{X} \rangle_{tr} - \langle b, \tilde{y} \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle_{tr}$$

Or, par le théorème de Fejér, il vient :

$$\langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle_{tr} = 0 \iff \tilde{X}\tilde{Z} = 0$$

$\square$

3.3 Programmation conique

3.3.1 Formulation des programmations coniques

On fixe E un espace vectoriel réel. Pour $\mathcal{K} \subset E$ un sous-ensemble, on note $\dim(\mathcal{K})$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble $\mathcal{K}$.

Définition 3.3.1. • Un cône $\mathcal{K}$ est dit **pointu** si $(\mathcal{K}) \cap (-\mathcal{K}) = \{0\}$

- Un cône $\mathcal{K}$ est dit **solide** si $\dim(\mathcal{K}) = \dim(E)$
- Un cône $\mathcal{K}$ est dit **propre** si ce dernier est convexe, fermé, solide et pointu.

Exemple 3.3.2. Cône de Lorentz : On considère l'ensemble

$$\mathcal{L}_+^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq x_0 \right\}$$

Il s'agit d'un cône propre. En effet, voyons qu'il vérifie bien les différents critères.

- Fermé : Il est clair que $\mathcal{L}_+^n = \underbrace{\Phi^{-1}(\underbrace{]--\infty, 0])}_{\text{fermé}}}$ où $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'application définie par

$\Phi(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i^2)^{\frac{1}{2}} - x_0$ qui est polynomiale donc continue en particulier. Par la caractérisation des ensembles fermés, $\mathcal{L}_+^n$ est fermé.

- Pointu : Soit $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in (\mathcal{L}_+^n) \cap (-\mathcal{L}_+^n)$ alors il vient :

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \implies x_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Maintenant, la seule possibilité pour que $x_0 \geq 0$ et $x_0 \leq 0$ est $x_0 = 0$. Finalement $x = (0, \dots, 0)$, donc

$$(\mathcal{L}_+^n) \cap (-\mathcal{L}_+^n) = \{0_{\mathbb{R}^{n+1}}\}$$

$\mathcal{L}_+^n$ est pointu.

- Solide :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice carrée de taille $n+1$ dont les vecteurs colonnes sont des éléments de $\mathcal{L}_+^n$. On peut facilement échelonner cette matrice en opérant sur les colonnes et, en échangeant les places de ces dernières, on obtient la matrice identité. On a ainsi montré que ces $n+1$ vecteurs forment une base de $\mathcal{L}_+^n$, d'où $\dim(\mathcal{K}) = n+1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$. $\mathcal{L}_+^n$ est donc solide.

- Convexe : On se donne 2 éléments de $\mathcal{L}_+^n$, $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ et $t \in [0, 1]$. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n ((tx_1 + (1-t)y_1)^2) &= \sum_{i=1}^n (t^2 x_1^2 + (1-t)^2 y_1^2 + 2t(1-t)x_1 y_1) \\ &\leq t^2 x_0^2 + (1-t)^2 y_0^2 + 2t(1-t) \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (\text{car } x, y \in \mathcal{L}_+^n) \\ &\leq t^2 x_0^2 + (1-t)^2 y_0^2 + 2t(1-t) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Cauchy-Schwartz}) \\ &\leq t^2 x_0^2 + (1-t)^2 y_0^2 + 2t(1-t)x_0 y_0 \quad (\text{car } x, y \in \mathcal{L}_+^n) \\ &= (tx_0 + (1-t)y_0)^2 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}_+^n$ est convexe.

Définition 3.3.3. Etant donné une application linéaire $\phi : E \rightarrow F$ et un cône propre $\mathcal{K} \subset E$, on appelle **Problème d'Optimisation Conique Primal** (POC-P) le problème d'optimisation :

$$\begin{cases} \min & \langle c, x \rangle_E \\ \text{contraint à} & \phi(x) = b \\ & x \in \mathcal{K} \end{cases} \quad (3.13)$$

3.3.2 Dualité

Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimension finie et $\phi : E \rightarrow F$ une application linéaire. On note E^* et F^* leur espace dual respectivement. Rappelons que l'application adjointe de ϕ est l'unique application linéaire $\phi^* : F^* \rightarrow E^*$ telle que

$$\forall x \in E, \forall y \in F^*, \langle \phi^* y, x \rangle_E = \langle y, \phi x \rangle_F$$

Pour $\mathcal{K}$ un cône, on définit son dual

$$\mathcal{K}^* := \{\phi \in E^* \mid \forall x \in \mathcal{K}, \langle \phi, x \rangle \geq 0\}$$

Cette définition du dual satisfait une stabilité des cônes propres qui est résumée dans le résultat qui suit.

Proposition 3.3.4. *Si $\mathcal{K}$ est un cône propre, alors $\mathcal{K}^*$ est un cône propre.*

Démonstration. Soit $\mathcal{K}$ un cône propre.

- Convexe : Soient $t \in [0, 1]$, $\phi_1, \phi_2 \in E^*$, alors pour $x \in \mathcal{K}$, on a :

$$\langle t\phi_1 + (1-t)\phi_2, x \rangle_E = t \underbrace{\langle \phi_1, x \rangle_E}_{\geq 0} + (1-t) \underbrace{\langle \phi_2, x \rangle_E}_{\geq 0} \geq 0$$

- Fermé : On remarque que

$$\mathcal{K}^* = \bigcap_{x \in \mathcal{K}} \{\phi \in E^* \mid \langle \phi, x \rangle_E \geq 0\}$$

qui est une intersection de fermés, ce qui conclut ce point.

- Pointu : Soit $\phi \in (\mathcal{K}^*) \cap (-\mathcal{K}^*)$ alors :

$$\left. \forall x \in \mathcal{K}, \begin{cases} \phi(x) \geq 0 \\ \phi(x) \leq 0 \end{cases} \right\} \implies \forall x \in \mathcal{K}, \phi(x) = 0$$

Par solidité de K dans E , ceci est vérifié pour tout x dans E d'où $\phi \equiv 0$. Donc $(\mathcal{K}^*) \cap (-\mathcal{K}^*) = \{0_E\}$

- Solide : C'est le point un peu plus compliqué. On sait que K^* est un cône fermé par ce qui précède.

Comme E est supposé de dimension finie, on a l'isomorphisme

$$f : \begin{cases} E & \longrightarrow & E^{**} \\ x & \longmapsto & (\psi : x \longrightarrow \psi(x)) \end{cases}$$

Voyons que $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{**}$.

Pour tout $\phi \in \mathcal{K}^*$ et pour tout $x \in \mathcal{K}$, on a $\phi(x) \geq 0$. Donc $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^{**}$.

Si $x \in E \setminus \mathcal{K}^{**}$, il existe donc $\phi \in \mathcal{K}^*$ tel que $\phi(x) < 0$, autrement dit $x \in E \setminus \mathcal{K}$. Donc $\mathcal{K}^{**} \subset \mathcal{K}$.

Voyons que $\mathcal{K}^*$ est solide. Si $J = \mathcal{K}^*$ alors $J^* = \mathcal{K}$ par passage au dual. Supposons J non solide, alors il existe $\phi \in E^*$ tel que $J \subset \text{Ker}(\phi)$, donc $\phi(x) = 0_F$ pour tout $x \in J$. On a donc

$$\begin{cases} \phi \in J^* \\ \phi \in (-J^*) \end{cases} \implies \phi \neq 0$$

donc J^* n'est pas pointu. C'est une contradiction. Donc $J = \mathcal{K}^*$ est solide.

Conclusion : $\mathcal{K}^*$ est un cône propre. □

Définition 3.3.5. *Le dual de 3.13, appelé **Problème d'Optimisation Conique Dual (POC-D)** est :*

$$\begin{cases} \max & \langle y, b \rangle_T \\ \text{s.c.} & c - \phi^* y \in \mathcal{K}^* \end{cases} \quad (3.14)$$

Remarque 3.3.6. *Il s'agit d'une généralisation des PSD.*

CONCLUSION : On a les inclusions (strictes) suivantes :

$$(PLS) \subsetneq (PSD) \subsetneq (POC)$$

Chapitre 4

Applications En Optimisation

Comme nous l'avons vu dans l'introduction de ce mémoire, la programmation semi-définie a trouvée de nombreuses applications en ingénierie mais aussi en statistiques, en théorie des graphes, etc. Ainsi les problèmes PSD apparaissent naturellement en contrôle (stabilité), graphes (mélange de chaînes de Markov) etc. Nous présentons dans ce chapitre quelques unes de ces applications.

4.1 Optimisation de valeurs propres

4.1.1 Recherche des valeurs propres minimales et maximales

C'est un problème venant de la façon la plus naturelle qui est traité à l'aide de la programmation semi-définie. Fixons un cadre : Soient $A \in \mathcal{S}_n$, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^m$, alors le problème de recherche de la valeur propre minimale d'une matrice symétrique peut se formuler comme suit :

$$\begin{aligned}\lambda_{min}(A) &= \min_{\|x\|=1} x^T A x \\ &= \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ x \neq 0}} \frac{x^T A x}{\|x\|^2}\end{aligned}$$

En posant $X := x x^T$, et en remarquant que

$$\|x\| = 1 \iff x^T x = 1 \iff \text{Tr}(X) = 1$$

. Le problème devient alors

$$\lambda_{min}(A) = \begin{cases} \min & \langle A, X \rangle_{tr} \\ \text{s.c.} & \text{Tr}(X) = 1 \\ & X \succeq 0 \end{cases}$$

En procédant de la même façon, le problème de la plus grande valeur propre peut s'écrire comme

$$\begin{aligned}\lambda_{max}(A) &= \max_{\|x\|=1} x^T A x \\ &= \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ x \neq 0}} \frac{x^T A x}{\|x\|^2}\end{aligned}$$

et le problème peut être mis sous la forme d'une PSD :

$$\lambda_{max}(A) = \begin{cases} \max & \langle A, X \rangle_{tr} \\ \text{s.c.} & \text{Tr}(X) = 1 \\ & X \succeq 0 \end{cases}$$

4.1.2 Minimisation du rayon spectral d'une matrice

Il s'agit d'un problème classique de la programmation semi-définie. On définit l'opérateur $A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{S}_n$ tel que

$$A(x) = A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_n A_n \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$$

pour $A_i \in \mathcal{S}_n$ $i \in \{1, \dots, n\}$. De cette définition, on remarquera l'étroit lien avec les spectraèdres d'un point de vu ensembliste.

Le problème qui se pose concerne la minimisation du rayon spectral de $A(x)$ sur $\mathbb{R}^k$, i.e, il s'agit de résoudre

$$\min_{x \in \mathbb{R}^k} (A(x)) \quad (4.1)$$

Ce dernier peut se transformer en un problème (PSD). Pour ce faire, on a besoin du résultat qui suit.

Proposition 4.1.1. *Soient $M \in \mathcal{S}_n$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors*

$$M \preceq tI_n \iff \lambda_{\max}(M) \leq t \quad (4.2)$$

Démonstration. La preuve repose uniquement sur la caractérisation de matrices semi-définies positives vue au chapitre 1 et la décomposition spectrale

Pour $M \in \mathcal{S}_n$ et $t \in \mathbb{R}$, $\exists P \in \mathcal{O}_n$ telle que $M = PDP^T$ où D est la matrice diagonale ayant comme coefficients les valeurs propres de M . Ainsi,

$$tI_n - M = tI_n - PDP^T = P(tI_n - D)P^T$$

On a alors :

$$\begin{aligned} tI_n \succeq M &\iff tI_n - M \succeq 0 \\ &\iff tI_n - D \succeq 0 \\ &\iff \lambda_{\min}(tI_n - D) \geq 0 \\ &\iff t \geq \lambda_{\min}(M) \end{aligned}$$

□

En utilisant ce résultat et en introduisant une variable $t \in \mathbb{R}$, 4.1 peut se réécrire comme

$$\begin{cases} \min t \\ \lambda_{\max}(A(x)) \leq t \\ x \in \mathbb{R}^k \end{cases}$$

Par 4.2, ce dernier est donc équivalent au problème (PSD) suivant :

$$\begin{cases} \min t \\ \text{s.c. } tI_n - A(x) \succeq 0 \\ x \in \mathbb{R}^k \end{cases}$$

Exemple 4.1.2. *On considère le problème*

$$\min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \left\{ \lambda_{\max} \left(x_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) \right\} = \min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \{ \lambda_{\max}(A(x)) \}$$

avec

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 - x_1 \\ x_2 - x_1 & -x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2$$

Par ce qu'on a vu précédemment, on peut reformuler le problème en un problème (PSD) qui est donné par :

$$\begin{cases} \min & t \\ \text{s.c.} & tI_2 - A(x) \succeq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \min & t \\ \text{s.c.} & \begin{pmatrix} t - x_1 & x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 & t + x_2 \end{pmatrix} \succeq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

4.1.3 Minimisation de la norme spectrale d'une matrice

Définition 4.1.3. Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

La **norme spectrale** de A est définie par :

$$|||A||| = \max_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ ||v||=1}} ||Av|| = \sigma_{\max}(A)$$

où $\sigma_{\max}(A)$ désigne la plus grande valeur singulière de $A^T A$ (i.e. la plus grande racine carrée des valeurs propres de A).

Un résultat (classique) sur les matrices symétriques est le suivant

Proposition 4.1.4. Soit $A \in \mathcal{S}_n$, alors

$$|||A||| = \sigma_{\max}(A) = \rho(A)$$

où $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de A (i.e., $\rho(A) := \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \{|\lambda_i| \mid \lambda_i \in \text{Sp}(A)\}$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$)

Démonstration. Il est clair que, comme $A \in \mathcal{S}_n$, la décomposition spectrale nous dit que les valeurs propres de $A^T A$ sont les carrés des valeurs propres de A , d'où l'égalité $\sigma_{\max}(A) = \rho(A)$.

Maintenant, dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (qui est orthonormée), on a $Ae_i = \lambda_i e_i$

Soit $v \in \mathbb{R}^n$, alors $\exists v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^n v_i e_i$.

Il vient :

$$\begin{aligned} Av &= \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i e_i \\ ||Av||^2 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 v_i^2 \\ ||Av||^2 &\leq (\rho(A))^2 ||v||^2 \end{aligned}$$

Pour $||v|| = 1$, on a donc $||Av|| \leq \rho(A)$ donc

$$\max_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ ||v||=1}} ||Av|| \leq \rho(A)$$

D'autre part, soit $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ telle que $|\lambda| = \rho(A)$, alors $Ax_0 = \lambda x_0$. D'où :

$$\begin{aligned} ||Ax_0|| &= |\lambda| ||x_0|| \\ \Rightarrow \left\| A \left(\frac{x_0}{||x_0||} \right) \right\| &= \rho(A) \text{ avec } \left\| \frac{x_0}{||x_0||} \right\| \leq 1 \\ \Rightarrow |||A||| &\geq \rho(A) \end{aligned}$$

□

Soit l'opérateur $A : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathcal{S}_n$ défini par $A(x) = A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_k A_k \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$. On cherche désormais à résoudre le problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathbb{R}^k} \|A(x)\|_2$$

où $\|A(x)\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^2(x))}$.

En introduisant $t \in \mathbb{R}$ une variable, on a (Théorème du complément de Schur) :

$$\|A(x)\|_2 \leq t \iff \lambda_{\max}(A^2(x)) \leq t^2$$

Or

$$\lambda_{\max}(A^2(x)) = \max_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{v^T A^2(x) v}{\|v\|^2}$$

Ainsi on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \|A(x)\|_2 \leq t &\iff v^T A^2(x) v \leq t^2 \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \\ &\iff v^T A^2(x) v \leq t^2 v^T v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \\ &\iff v^T (t^2 I_n - A^2(x)) v \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \\ &\iff t^2 I_n - A^2(x) \succeq 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} t I_n & A(x) \\ A(x) & t I_n \end{pmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de reformuler notre problème sous la forme

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \min & t \\ \text{s.c.} & \|A(x)\|_2 \leq t \end{cases} \\ &\iff (PSD - P) \begin{cases} \min & t \\ \text{s.c.} & \begin{pmatrix} t I_n & A(x) \\ A(x) & t I_n \end{pmatrix} \succeq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

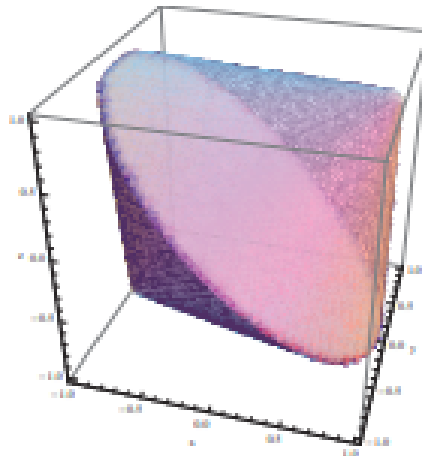


FIGURE 4.1 – Représentation de la boule unité de la norme spectrale pour les matrices symétriques 2×2

4.2 Optimisation combinatoire

Rappelons tout d'abord quelques définitions afin de fixer les bases en théorie des graphes.

- Définition 4.2.1.**
- Un **graphe** G (fini, non orienté, simple) est un couple $G := (V, E)$ où V est de la forme $V = \{1, \dots, n\}$ et E est un ensemble de couples distincts de V . V est appelé l'ensemble des **sommets** de G et E désigne l'ensemble des **arrêtes** de G .
 - Un graphe G est **complet** si toute paire de sommets est une arrête.
 - Deux sommets distincts i, j de G sont dits **adjacents** si ce sont les extrémités d'une arrête de G i.e. $(i, j) \in E$. Un sommet $u \in V$ et une arrête $e \in E$ sont dits **incidents** si l'arrête e admet le sommet u comme extrémité, i.e. $u \in e$.
 - $G' := (V', E')$ est un **sous-graphe** du graphe $G = (V, E)$ si $V' \subset V$ et $E' \subseteq E$.
 - Une **clique** de G est un sous-graphe complet de G .
 - Le **nombre de cliques** d'un graphe G est le nombre de sommets d'une clique maximale (i.e. clique ayant son cardinal le plus grand possible). On le note $\omega(G)$.

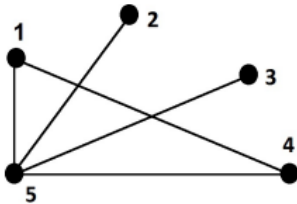


FIGURE 4.2 – Graphe (non complet) à 5 sommets

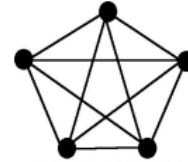


FIGURE 4.3 – Graphe complet à cinq sommets

Le problème du stable (maximum)

Il s'agit d'un problème très classique dans la théorie de l'optimisation combinatoire.

Le problème est le suivant :

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté à n sommets.

Question : Quel est l'ensemble (ou les ensembles, s'ils existent) S de sommets de cardinalité maximale tel que le sous-graphe induit par S ne possède pas d'arête? (stable de G).

Pour ce faire, fixons quelques objets.

- $\mathfrak{M}(G) = \{A \in \mathcal{S}_n \mid A_{ij} = 1 \text{ si } (i, j) \in E \text{ ou } i = j\}$
- On définit $E^{ij} \in \mathcal{S}_n$ telle que

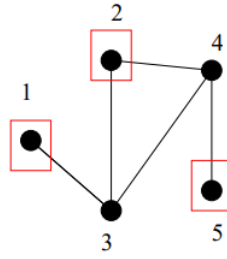
$$\begin{cases} E_{ij}^{ij} = E_{ji}^{ij} = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque 4.2.2. • $\mathfrak{M}(G)$ est un espace affine.

- $(J_n, E^{1,2}, E^{1,3}, \dots, E^{ij}, \dots, E^{n-1,n})$ est un repère de l'espace affine $\mathfrak{M}(G)$. On a donc l'équivalence

$$A \in \mathfrak{M}(G) \iff A = J_n + \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} E^{ij}$$

Exemple 4.2.3. On considère le graphe non orienté à 5 sommets non complet suivant



Soit $A \in \mathfrak{M}(G)$ définie par $A = J_5 - 6E^{13} - E^{23} + 6E^{24} + 5E^{34} - 2E^{45}$, soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 7 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 6 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposition 4.2.4. *On a les résultats suivants :*

1. *Il existe un stable de taille k dans G si et seulement si toute matrice A dans $\mathfrak{M}(G)$ contient la sous-matrice $J_k \in \mathcal{S}_k$.*
2. *Les valeurs propres de J_k sont 0 et k .*
3. *Pour $A \in \mathfrak{M}(G)$, on a $\lambda_{\max}(A) \geq \lambda_{\max}(J_k) = k$.*
4. *Pour $A \in \mathfrak{M}(G)$, on a $\lambda_{\max}(A) \geq \alpha(G)$ où $\alpha(G)$ désigne le nombre de stabilité, i.e. la taille d'un plus grand stable dans G .*
5. *Meilleure borne :*

$$\min_{A \in \mathfrak{M}(G)} \lambda_{\max}(A)$$

La proposition 4.2 nous donne l'égalité

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda I_n - A \succeq 0\} = \lambda_{\max}(A)$$

Or, par le théorème spectral (1.2.7), on a

$$\lambda I_n - A = \lambda I_n - PDP^T = P(\lambda I_n - D)M^T$$

avec $P \in \mathcal{I}_n$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Ainsi, $\lambda I_n - D \succeq 0 \iff \lambda \geq \lambda_{\max}(A)$.

Le problème

$$\min_{A \in \mathfrak{M}(G)} \lambda_{\max}(A)$$

est donc équivalent à :

$$\theta(G) \left\{ \begin{array}{l} \min \lambda \\ \text{s.c. } \lambda I_n - \underbrace{\left(J_n + \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} E^{ij} \right)}_{A \in \mathfrak{M}(G)} \succeq 0 \end{array} \right.$$

Annexe

Quelques jolies représentations de spectraèdres

1. Coupes de certains spectraèdres :

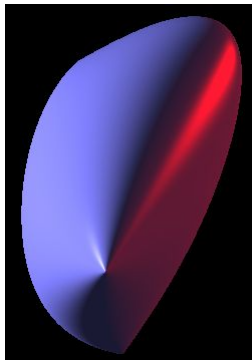


FIGURE 4.4 – Coupe d'un spectraèdre de degré quatre

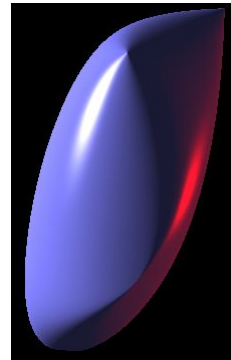


FIGURE 4.5 – Coupe d'un spectraèdre de degré quatre

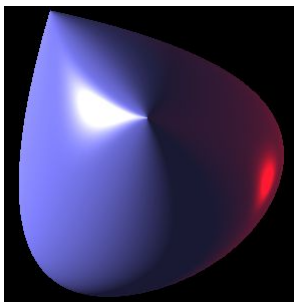


FIGURE 4.6 – Coupe d'un spectraèdre de degré quatre

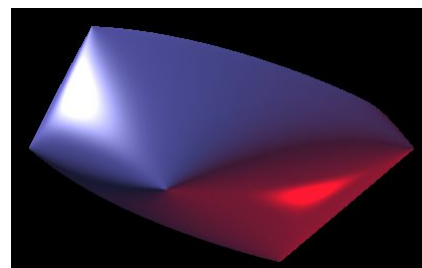


FIGURE 4.7 – Coupe d'un spectraèdre de degré cinq

2. $f(x) = -qx_0^2 + 2gx_0 + \Delta$ avec $q = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, $g = 8x_3^2 - 6x_1^2x_3$ et $\Delta = x_1^4 - 41x_1^2x_2^2 + 16x_2^4 + 12x_1^3x_3 - 36x_1x_2^2x_3 - 5x_1^2x_3^2 + 44x_2x_3^2 - 36x_1x_3^3 + 28x_3^4$

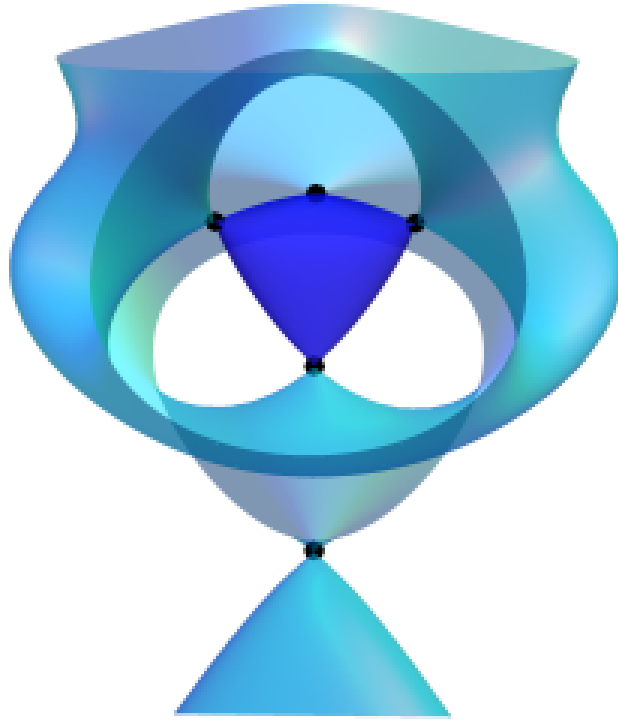


FIGURE 4.8 – Représentation du spectraèdre défini par le polynôme f

3. Spectraèdre de Toeplitz (noté $\mathcal{S}_T$) :

$$\mathcal{S}_T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & x & y \\ y & x & 1 & x \\ z & y & x & 1 \end{bmatrix} \succeq 0 \right\}$$

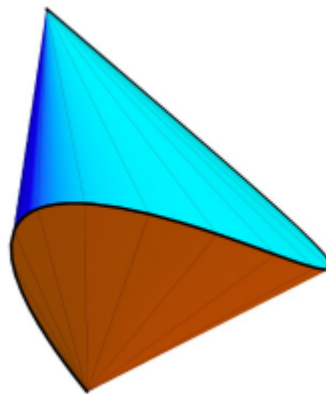


FIGURE 4.9 – Représentation du spectraèdre de Toeplitz

4. Surface de Kummer :

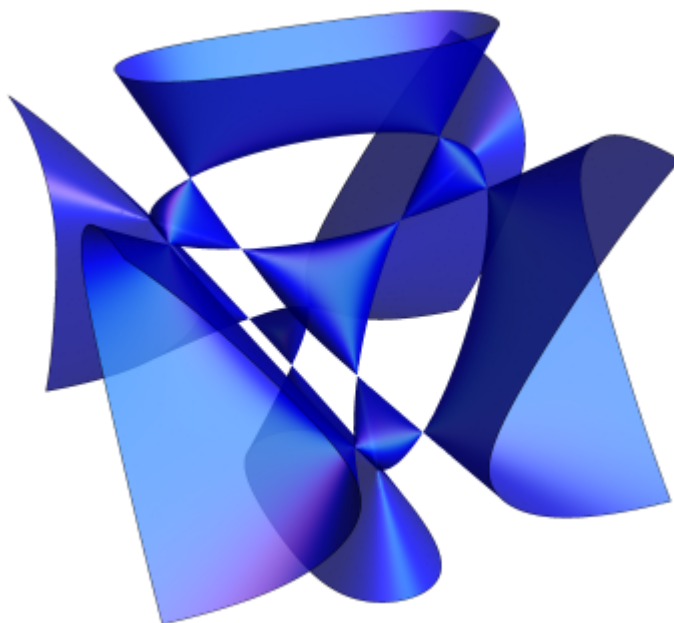


FIGURE 4.10 – Représentation de la surface de Krummer

5. Spectraèdre cubique transversal :

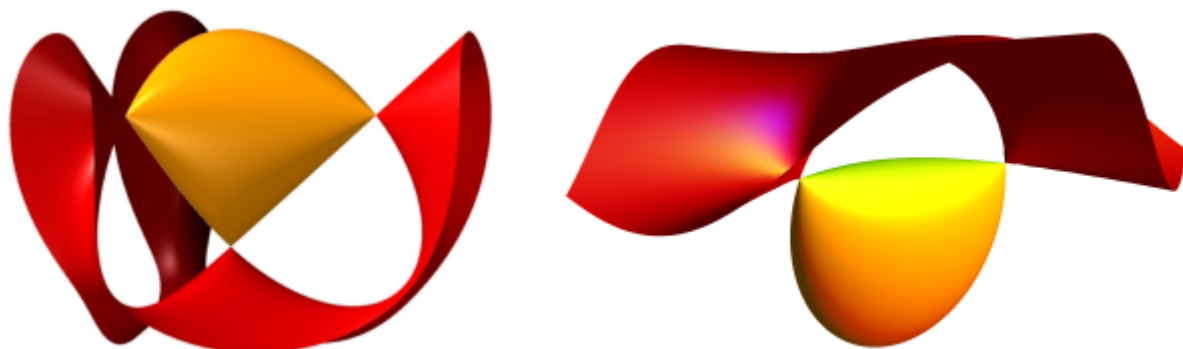


FIGURE 4.11 – Représentations de spectraèdres cubiques transversaux

Bibliographie

- [1] Grigoriy BLEKHERMAN, Pablo A. PARRILO, Rekha R. THOMAS, *Semidefinite Optimization and Convex Algebraic Geometry*, 2013, <http://www.mit.edu/~parrilo/sdocag/SIAMBookFinalvNov12-2012.pdf>.
- [2] Olivier DEBARRE, *Polytopes Et Points Entiers*, <https://perso.imj-prg.fr/olivier-debarre/wp-content/uploads/debarre-pub/Aussois.pdf>.
- [3] *Optimisation Pour La Licence*, 2013-2014.
- [4] Ismaïel KRIM, *Optimisation Sous Contraintes De Semi-Définie Positivité*, 2014.
- [5] Mohamed NASSIRI, *Notes Sur Les Spectraèdres*, 2020, https://data.over-blog-kiwi.com/3/45/46/16/20200828/ob_314da1_les-spectraedres.pdf
- [6] Luis PARIS, *Master De Mathématiques, Première Année, Cours d'Algèbre*, 2021-2022.
- [7] John Christian OTTEM, Kristian RANESTAD, Bernd STURFMFELS, Cynthia VINZANT, *Quartic Spectrahedra*, 2014.
- [8] Emmanuelle CURATOLO, *Polyèdres Platoniciens - Unicité Et Existence*, 2007.
- [9] Daniele FAENZI, *Notes Du Cours De Géométrie*, 2021.
- [10] Shizan FANG, *Leçons d'Analyse*, 2021-2022.
- [11] Ahmed JEBRANE, *Algèbre Linéaire Et Bilinéaire*, 2019-2020.
- [12] *Chapitre 4 - Dualité*, <https://www2.mat.ulaval.ca/fileadmin/Cours/MAT-2920/Chapitre4.pdf>
- [13] Xavier GOURDON, *Algèbre*, 3^{ème} édition, 2009.