

Algèbres fusionnées, dualité de Schur-Weyl et applications

Séminaire jeune chercheur

DEMESMAY Yoann

Université de Reims Champagne-Ardenne

Juin 2025

- ➊ Motivation
 - Origines et intérêts
 - La dualité de Schur-Weyl
- ➋ Algèbre des permutations fusionnées
 - Définition et exemples
- ➌ Résultats classiques
 - Un théorème fondamental
 - Exemples
- ➍ Étude d'une sous-algèbre
 - Présentation d'une sous-algèbre
- ➎ Cas particulier
 - AHDC
 - Lien avec l'APF
- ➏ Centre
 - Centre
- ➐ Conclusion
 - Objectifs pour la suite

- Théorie des représentations.
- Fin XIX-ème.
- Dualité de SCHUR-WEYL (début du XXème siècle).
- Généralisation via une théorie récente (fin XXème-aujourd'hui) : les algèbres de HECKE (fusionnées).
- Construire les représentations irréductibles de $GL(V)$ à l'aide de celles du groupe symétrique.
- Décomposer $V^{\otimes k}$, $k \geq 3$.

- ➊ Motivation
 - Origines et intérêts
 - La dualité de Schur-Weyl
- ➋ Algèbre des permutations fusionnées
 - Définition et exemples
- ➌ Résultats classiques
 - Un théorème fondamental
 - Exemples
- ➍ Étude d'une sous-algèbre
 - Présentation d'une sous-algèbre
- ➎ Cas particulier
 - AHDC
 - Lien avec l'APF
- ➏ Centre
 - Centre
- ➐ Conclusion
 - Objectifs pour la suite

Définition

$$\begin{aligned} \rho_k: GL(V) &\longrightarrow End(V^{\otimes k}) \\ g &\longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} V^{\otimes k} & \longrightarrow & V^{\otimes k} \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_k & \longmapsto & gv_1 \otimes \dots \otimes gv_k \end{array} \right. \\ \\ \sigma_k: \mathfrak{S}_k &\longrightarrow End(V^{\otimes k}) \\ s &\longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} V^{\otimes k} & \longrightarrow & V^{\otimes k} \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_k & \longmapsto & v_{s^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{s^{-1}(k)} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Définition

$$Comm(S) = \{x \in End(V) \mid x \circ s = s \circ x \quad \forall s \in S\}$$

$\mathcal{A} \subset End(W)$ une algèbre semi-simple, $\mathcal{B} := Comm(\mathcal{A})$.

$$\bigoplus_{i=1}^k V_i^{\oplus \dim(U_i)} \cong W \cong \bigoplus_{i=1}^k U_i^{\oplus \dim(V_i)},$$

$$W \cong \bigoplus_{i=1}^k V_i \otimes U_i.$$

On rappelle qu'on a : $\mathcal{A} \cong \bigoplus_{i=1}^r End(V_i) \otimes I_{U_i}$.

$$\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \xrightarrow{\sigma_k} \text{End}(V^{\otimes k}) \xleftarrow{\rho_k} \mathbb{C}GL(V)$$

Soient $\mathcal{A} := \rho_k(\mathbb{C}GL(V))$, $\mathcal{B} := \sigma_k(\mathbb{C}\mathfrak{S}_k)$.

Théorème (Schur)

$\mathcal{A} = \text{Comm}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{B} = \text{Comm}(\mathcal{A})$.

Théorème (Dualité de Schur-Weyl)

$$\bigotimes^k V = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathcal{P}_k \\ \ell(\lambda) \leq \dim(V)}} V_\lambda \otimes \mathbb{S}_\lambda(V).$$

Extension de la dualité

Soient $n \in \mathbb{N}$, $\underline{k} = (k_1, \dots, k_n)$ et $N := \sum_{i=1}^n k_i$. Soit $P_{\underline{k},n}$ (idempotent de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_N$).

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\underline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, on définit l'algèbre :

$$\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1) := P_{\underline{k},n} \cdot \mathbb{C}\mathfrak{S}_N \cdot P_{\underline{k},n}.$$

$$H_{\underline{k},n}(1) \xrightarrow{\sigma_{\underline{k},n}} \text{End} \left(\bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V) \right) \xleftarrow{\rho_{\underline{k},n}} \mathbb{C}GL(V)$$

Posons $\mathcal{A} := \sigma_{\underline{k},n}(H_{\underline{k},n}(1))$ et $\mathcal{B} := \rho_{\underline{k},n}(\mathbb{C}GL(V))$.

Théorème

$\text{Comm}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ et $\text{Comm}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$.

Théorème (Extension de la dualité de Schur-Weyl)

$$\bigotimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V) \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \in U_{\underline{k},n} \\ \ell(\lambda) \leq \dim(V)}} \underbrace{\mathbb{S}_\lambda(V) \otimes W_\lambda}_{\mathbb{C}GL(V) \otimes H_{\underline{k},n}(1)\text{-module}}$$

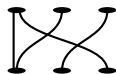
- ➊ Motivation
 - Origines et intérêts
 - La dualité de Schur-Weyl
- ➋ Algèbre des permutations fusionnées
 - Définition et exemples
- ➌ Résultats classiques
 - Un théorème fondamental
 - Exemples
- ➍ Étude d'une sous-algèbre
 - Présentation d'une sous-algèbre
- ➎ Cas particulier
 - AHDC
 - Lien avec l'APF
- ➏ Centre
 - Centre
- ➐ Conclusion
 - Objectifs pour la suite

Exemples :

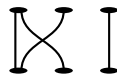
- $n = 3$, $\underline{k} = (2, 1, 1)$. 6 possibilités :



$(\{1, 1\}, \{2\}, \{3\})$



$(\{1, 3\}, \{1\}, \{2\})$



$(\{1, 2\}, \{2\}, \{3\})$

- $n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{k} = (1, 1, \dots, 1)$. Permutation fusionnée $\leftrightarrow$ Permutation.

Définition

L'algèbre des permutations fusionnées (APF) $(H_{\underline{k}, n}(1), +, \cdot)$:

- Espace vectoriel : Base indexée par les permutations fusionnées.
- Multiplication : Cf. Exemple.

Exemple : $n = 2$, $\underline{k} = (2, 2)$:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \cdot \text{Diagram 2} \\ \swarrow \quad \searrow \\ (\{1, 2\}, \{1, 2\}) \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ + \\ \text{Diagram 4} \\ + \\ \text{Diagram 5} \\ + \\ \text{Diagram 6} \end{array} = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ + \\ \text{Diagram 8} \\ + \\ \text{Diagram 9} \\ + \\ \text{Diagram 10} \end{array} \right) \\
 & = \frac{1}{4} \begin{array}{c} \text{Diagram 11} \\ + \\ \text{Diagram 12} \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ + \\ \text{Diagram 14} \end{array} + \frac{1}{4} \begin{array}{c} \text{Diagram 15} \\ + \\ \text{Diagram 16} \end{array} .
 \end{aligned}$$

- ➊ Motivation
 - Origines et intérêts
 - La dualité de Schur-Weyl
- ➋ Algèbre des permutations fusionnées
 - Définition et exemples
- ➌ Résultats classiques
 - Un théorème fondamental
 - Exemples
- ➍ Étude d'une sous-algèbre
 - Présentation d'une sous-algèbre
- ➎ Cas particulier
 - AHDC
 - Lien avec l'APF
- ➏ Centre
 - Centre
- ➐ Conclusion
 - Objectifs pour la suite

Théorème (Artin-Wedderburn, 1907)

Les algèbres semi-simples de dimension finie sont les sommes directes finies d'algèbres de la forme $\text{End}(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie. On a donc un isomorphisme d'algèbres :

$$\Phi : \mathcal{A} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \text{End}(V^\lambda)$$

où Λ est un ensemble fini.

Exemple : Algèbre d'un groupe fini.

Corollaire

Soit A une algèbre semi-simple de dimension finie. Alors on a l'égalité :

$$\dim(\mathcal{A}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim(V^\lambda)^2.$$

Corollaire (Dimension du centre)

$$\dim(Z(\mathcal{A})) = |\Lambda|.$$

- ➊ Motivation
 - Origines et intérêts
 - La dualité de Schur-Weyl
- ➋ Algèbre des permutations fusionnées
 - Définition et exemples
- ➌ Résultats classiques
 - Un théorème fondamental
 - Exemples
- ➍ Étude d'une sous-algèbre
 - Présentation d'une sous-algèbre
- ➎ Cas particulier
 - AHDC
 - Lien avec l'APF
- ➏ Centre
 - Centre
- ➐ Conclusion
 - Objectifs pour la suite

L'algèbre du groupe symétrique :

- $n = 3 : \mathbb{C}\mathfrak{S}_3 \cong \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_2(\mathbb{C})$.
- $n = 4 : \mathbb{C}\mathfrak{S}_4 \cong \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})^{\oplus 2}$.
- $n = 5 : \mathbb{C}\mathfrak{S}_5 \cong \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_4(\mathbb{C})^{\oplus 2} \oplus M_5(\mathbb{C})^{\oplus 2} \oplus M_6(\mathbb{C})$.

L'algèbre des permutations fusionnées :

Théorème

Les algèbres $\mathcal{H}_{\underline{k},n}(1) := P_{\underline{k},n} \mathbb{C}\mathfrak{S}_N P_{\underline{k},n}$ et $H_{\underline{k},n}(1)$ sont isomorphes et semi-simples.

- $n = 2, \underline{k} \in (\mathbb{N}^*)^2$ quelconque : $H_{\underline{k},2} \cong \mathbb{C}^{\oplus N}$, $N \in \mathbb{N}^*$.
- $n = 3, \underline{k} = (2,2,2) : H_{\underline{k},3} \cong \mathbb{C}^{\oplus 4} \oplus M_2(\mathbb{C})^{\oplus 2} \oplus M_3(\mathbb{C})$.
- $n = 4, \underline{k} = (2,2,2,2) : H_{\underline{k},4} \cong \mathbb{C}^{\oplus 3} \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})^{\oplus 6} \oplus M_6(\mathbb{C})^{\oplus 3} \oplus M_7(\mathbb{C}) \oplus M_8(\mathbb{C})$.

- ➊ Motivation
 - Origines et intérêts
 - La dualité de Schur-Weyl
- ➋ Algèbre des permutations fusionnées
 - Définition et exemples
- ➌ Résultats classiques
 - Un théorème fondamental
 - Exemples
- ➍ Étude d'une sous-algèbre
 - Présentation d'une sous-algèbre
- ➎ Cas particulier
 - AHDC
 - Lien avec l'APF
- ➏ Centre
 - Centre
- ➐ Conclusion
 - Objectifs pour la suite

$n = 3$, $\underline{k} = (2, 2, 2)$:



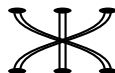
1



σ_1



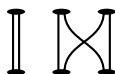
σ_2



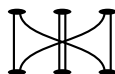
$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1$



$X_{1,2}$



$X_{2,3}$



$X_{1,3}$

Définition (Sous-algèbre de $H_{\underline{k},n}(1)$)

On définit la sous-algèbre de $H_{\underline{k},n}(1)$ suivante :

$$\tilde{H}_{\underline{k},n} = \langle X_{i,j} \mid i \neq j, i, j = 1, \dots, n \rangle.$$



Théorème (P.A., D., 2025)

Une présentation par générateurs et relations de $\tilde{H}_{2,3}$ est donnée par :

- Générateurs : Des indéterminées $Z_1, Z_2, \sigma_1, \sigma_2$.
- Relations : Les relations définissantes suivantes :

❶ Relations du groupe symétrique :

$$\begin{cases} \sigma_i^2 = 1, \quad i = 1, 2; \\ \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2. \end{cases}$$

❷ Quasi-idempotence : $Z_i^2 = 6Z_i, \quad i = 1, 2$.

❸ Invariance : $\sigma_i Z_j = Z_j \sigma_i = Z_j, \quad i = 1, 2$.

❹ Conjugaison : $\sigma_1 Z_2 \sigma_1 = \sigma_2 Z_1 \sigma_2$.

❺ Relations des triplets :

$$\begin{cases} (R1) & Z_1 Z_2 \sigma_1 = Z_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1 Z_2 - Z_1 Z_2 + \frac{1}{3}(Z_1 Z_2 Z_1 - Z_1 \sigma_2 Z_1); \\ (R2) & Z_2 Z_1 \sigma_2 = Z_2 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2 Z_1 - Z_2 Z_1 + \frac{1}{3}(Z_2 Z_1 Z_2 - Z_2 \sigma_1 Z_2); \\ (R3) & \sigma_1 Z_2 Z_1 = \sigma_2 Z_1 + Z_2 \sigma_1 \sigma_2 - Z_2 Z_1 + \frac{1}{3}(Z_1 Z_2 Z_1 - Z_1 \sigma_2 Z_1); \\ (R4) & \sigma_2 Z_1 Z_2 = \sigma_1 Z_2 + Z_1 \sigma_2 \sigma_1 - Z_1 Z_2 + \frac{1}{3}(Z_2 Z_1 Z_2 - Z_2 \sigma_1 Z_2); \\ (R5) & Z_2 \sigma_1 Z_2 = Z_1 \sigma_2 Z_1 + \frac{1}{2}(Z_1 Z_2 Z_1 - Z_2 Z_1 Z_2) + \frac{3}{2}(Z_2 - Z_1). \end{cases}$$

Corollaire

$\mathbb{C}\mathfrak{S}_3$ et $B_3(6)$ sont des quotients de $\tilde{H}_{2,3}$.

- ➊ Motivation
 - Origines et intérêts
 - La dualité de Schur-Weyl
- ➋ Algèbre des permutations fusionnées
 - Définition et exemples
- ➌ Résultats classiques
 - Un théorème fondamental
 - Exemples
- ➍ Étude d'une sous-algèbre
 - Présentation d'une sous-algèbre
- ➎ Cas particulier
 - AHDC
 - Lien avec l'APF
- ➏ Centre
 - Centre
- ➐ Conclusion
 - Objectifs pour la suite

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On fixe un m -uplet $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_m) \in \mathbb{Z}^m$. Notons $f_\kappa := \prod_{i=1}^m (x_1 - \kappa_i)$.

Définition

L'**algèbre de Hecke (affine) dégénérée cyclotomique** (AHDC) de paramètre cyclotomique κ est l'algèbre associative unitaire $\widehat{\mathcal{H}}_n^\kappa$ ayant pour générateurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ (éléments de Jucys-Murphy), $s_1, \dots, s_{n-1}$ (éléments de Coxeter) et soumis aux relations suivantes :

$$f_\kappa = 0,$$

$$x_1 s_\ell = s_\ell x_1 \quad \text{si } \ell = 2, \dots, n-1,$$

$$x_u x_t = x_t x_u, \quad u, t = 1, \dots, n,$$

$$x_{r+1} = s_r x_r s_r + x_r, \quad r = 1, \dots, n-1,$$

$$s_k^2 = 1 \quad \text{où } k = 1, \dots, n-1,$$

$$s_i s_j = s_j s_i \quad \text{si } |i - j| > 1,$$

$$s_k s_{k+1} s_k = s_{k+1} s_k s_{k+1} \quad \text{où } k = 1, \dots, n-2.$$

Théorème (H,M, 2014)

Soit $\kappa = (0, k+1)$. L'algèbre $\widehat{\mathcal{H}}_n^\kappa$ est semi-simple si, et seulement si, $n \leq k+1$. Dans ce cas, les représentations irréductibles sont indexées par $Par_2(n)$.

- 1 Motivation
 - Origines et intérêts
 - La dualité de Schur-Weyl
- 2 Algèbre des permutations fusionnées
 - Définition et exemples
- 3 Résultats classiques
 - Un théorème fondamental
 - Exemples
- 4 Étude d'une sous-algèbre
 - Présentation d'une sous-algèbre
- 5 Cas particulier
 - AHDC
 - Lien avec l'APF
- 6 Centre
 - Centre
- 7 Conclusion
 - Objectifs pour la suite

Soit $\underline{k} = (k, 1, \dots, 1)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Exemples de diagrammes dans $H_{\underline{k}, n}(1)$:

$$1 := \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{c} n \\ | \\ \hline \end{array},$$

$$\sigma_i := \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{c} i-1 \\ | \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} i \\ \swarrow \\ i+1 \end{array} \begin{array}{c} i+1 \\ \searrow \\ i \end{array} \begin{array}{c} i+2 \\ | \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{c} n \\ | \\ \hline \end{array}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\sigma_0 := \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{c} n \\ | \\ \hline \end{array}.$$

Proposition (D., 2025)

$H_{\underline{k}, n}(1)$ est un quotient de $\widehat{\mathcal{H}}_n^k$.

Corollaire

Il existe une partie $S \subset \text{Par}_2(n)$ telle que, pour $k \geq n$, on a :

$$H_{\underline{k}, n}(1) \cong \bigoplus_{\lambda \in S} \text{End}(V^\lambda).$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq 0$. Soit $\kappa = (0, n + p + 1)$.

Théorème (P.A., D., 2025)

Une présentation par générateurs et relations de $H_{\underline{n+p}, n}(1)$ est donnée par :

- Générateurs : Des indéterminées $x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_{n-1}$.
- Relations :
 - ❶ Les relations définissantes de l'ADHC.
 - ❷ $(x_1 s_1)^2 = x_1 s_1 x_1 - x_1 s_1 + x_1$.

En particulier, $H_{\underline{n}, n}(1) \cong H_{\underline{n+p}, n}(1)$.

Quid de $k \leq n - 1$?

Théorème (P.A., D., 2025)

Une présentation par générateurs et relations de $H_{\underline{n-1}, n}(1)$ est donnée par :

- Générateurs : Des indéterminées $x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_{n-1}$.
- Relations :
 - ❶ Les relations définissantes de l'ADHC.
 - ❷ $(x_1 s_1)^2 = x_1 s_1 x_1 - x_1 s_1 + x_1$.
 - ❸ $E(\square \dots \square, \emptyset) = 0$.

- ➊ Motivation
 - Origines et intérêts
 - La dualité de Schur-Weyl
- ➋ Algèbre des permutations fusionnées
 - Définition et exemples
- ➌ Résultats classiques
 - Un théorème fondamental
 - Exemples
- ➍ Étude d'une sous-algèbre
 - Présentation d'une sous-algèbre
- ➎ Cas particulier
 - AHDC
 - Lien avec l'APF
- ➏ Centre
 - Centre
- ➐ Conclusion
 - Objectifs pour la suite

On considère ici $\underline{k} = (k, k, \dots, k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Propriété (Dimension du centre)

$$\dim(Z(H_{\underline{k},n}(1))) = |\{\lambda \in \mathcal{P}_{kn} \mid \ell(\lambda) \leq n\}|.$$

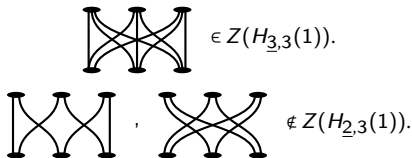
Théorème (D., 2025)

Pour $n=2$, toute permutation fusionnée pure est centrale. En particulier, $H_{\underline{k},2}$ est une algèbre commutative.

Pour $n \geq 3$ et quelque soit $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une permutation fusionnée pure (non triviale) centrale si, et seulement si, k est un multiple de n .

Dans ce cas précis, elle est de plus unique.

Exemples :



- ➊ Motivation
 - Origines et intérêts
 - La dualité de Schur-Weyl
- ➋ Algèbre des permutations fusionnées
 - Définition et exemples
- ➌ Résultats classiques
 - Un théorème fondamental
 - Exemples
- ➍ Étude d'une sous-algèbre
 - Présentation d'une sous-algèbre
- ➎ Cas particulier
 - AHDC
 - Lien avec l'APF
- ➏ Centre
 - Centre
- ➐ Conclusion
 - Objectifs pour la suite

À court terme :

- Base canonique pour les chaînes d'algèbres $(H_{\underline{k},n}(1))_{n \geq 1}$ et $(Z(H_{\underline{k},n}(1)))_{n \geq 1}$, lorsque $\underline{k} = (k, k, \dots, k)$.
- Étude des éléments de Jucys-Murphy pour $(H_{\underline{k},n}(1))_{n \geq 1}$.

Et après :

- Généraliser à un $\underline{k}$ arbitraire.
- Comprendre le centralisateur $\text{End}_{GL(V)}(\otimes_{i=1}^n \text{Sym}^{k_i}(V)) = \sigma_{\underline{k},n}(H_{\underline{k},n})$ comme quotient de $H_{\underline{k},n}(1)$.
- Applications.

Merci pour votre attention !

-  R. Goodman, N. Wallach, *Symmetry, Representations and Invariants*, Springer, 2009.
-  A. Kleshchev, *Linear and projective representations of symmetric groups*, Cambridge University Press, 2005.
-  J. Hu, A. Mathas, *Seminormal forms and cyclotomic quiver hecke algebras of type A*, 2014, arXiv:1304.0906.
-  L. Poulain d'Andecy, *Centralisers and Hecke algebras in Representation Theory, with applications to Knots and Physics*, 2023, arXiv:2304.00850.
-  N. Crampé, L. Poulain d'Andecy, *Fused braids and centralisers of tensor representations of $U_q(\mathfrak{gl}_N)$* , Algebr. Represent. Theor. 2022, arXiv:2001.11372.
-  M. Zaimi, L. Poulain d'Andecy, *Fused Hecke algebra and one-boundary algebras*, Pacific Journal of Mathematics, 2023, arXiv:2306.10937.
-  M. Geick, G. Pfeiffer, *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke Algebras*, Clarendon press, Oxford, 2000.
-  A.I. Molev, *On the fusion procedure for the symmetric group*, 2006, arXiv:math/0612207v5.