

# Éléments de Jucys-Murphy d'une chaîne d'algèbres

Séminaire jeune chercheur

DEMESMAY Yoann

Université de Reims Champagne-Ardenne

14/10/25

- 1 Généralités
  - Histoire
  - Définitions élémentaires
- 2 Résultats classiques
  - Un théorème fondamental
  - Cas du groupe symétrique
  - Exemples
- 3 Éléments de Jucys-Murphy
  - Idempotents d'une algèbre
  - Définition et exemples
  - L'exemple de  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ .
  - Cas de l'algèbre de Brauer
- 4 Étude d'une classe d'algèbres
  - Définition
  - Éléments candidats
- 5 Conclusion

- Théorie des représentations.
- Fin XIX-ème.
- Courant XX-ième : apparition des éléments de Jucys-Murphy pour l'algèbre du groupe symétrique.
- Plus récemment : généralisation de ces éléments à des chaînes d'algèbres semi-simples.
- Système complet d'idempotents centraux orthogonaux.
- Construction des représentations irréductibles.

## 1 Généralités

- Histoire
- Définitions élémentaires

## 2 Résultats classiques

- Un théorème fondamental
- Cas du groupe symétrique
- Exemples

## 3 Éléments de Jucys-Murphy

- Idempotents d'une algèbre
- Définition et exemples
- L'exemple de  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ .
- Cas de l'algèbre de Brauer

## 4 Étude d'une classe d'algèbres

- Définition
- Éléments candidats

## 5 Conclusion

Soit  $\mathfrak{A}$  une algèbre.

## Définition

Une **représentation** de  $\mathfrak{A}$  est la donnée d'une paire  $(V, \rho)$  où :

- $V$  est un espace vectoriel.
- $\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}(V)$  est un morphisme d'algèbres.

Elle est dite **irréductible** si pour tout sous-espace vectoriel  $0 \neq W \subset V$ , on a :

$$\rho(\mathfrak{A})(W) \subset W \implies W = V.$$

## Exemples :

- $a \in \mathfrak{A} \longrightarrow 1$  : représentation triviale.
- $a \in \mathfrak{A} \longrightarrow (b \longmapsto ab)$  : représentation régulière.
- $\mathfrak{A} := \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ .  $(i, i+1) \longrightarrow -1$  : représentation signature.
- $\mathfrak{A} := \mathbb{C}\mathfrak{S}_4$ .  $(1,2), (3,4) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $(2,3) \longrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

## Définition

Une algèbre  $\mathfrak{A}$  est dite **semi-simple** si toute représentation  $(V, \rho)$  se décompose en une somme directe de ses représentations irréductibles, i.e. si :

$$V \simeq \bigoplus_{V_\lambda \in Irr(\mathfrak{A})} V_\lambda^{\oplus m_\lambda}, \quad m_\lambda \in \mathbb{N}.$$

**Exemples :**  $\mathfrak{A} = \mathbb{C}\mathfrak{S}_n : (i, i+1) \xrightarrow{\rho} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq V_1 \oplus V_2 \oplus V_1 \oplus V_2 \simeq V_1^{\oplus 2} \oplus V_2^{\oplus 2}$ , où  $V_1$  :

triviale,  $V_2$  : signature.

La représentation régulière :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathfrak{S}_n & \xrightarrow{Reg} & End(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n) \\ a & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathfrak{S}_n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}\mathfrak{S}_n \\ b & \mapsto & ab \end{array} \right. \end{array}$$

Alors, en voyant  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$  comme une représentation de  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ , on a la décomposition :

$$\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \simeq \bigoplus_{V_\lambda \in Irr(\mathfrak{A})} V_\lambda^{\oplus m_\lambda},$$

où  $m_\lambda = \dim(V_\lambda)$ .

Soit  $\mathfrak{A}$  une algèbre.

## Définition

Une **sous-algèbre commutative maximale** de  $\mathfrak{A}$  est une sous-algèbre  $\mathfrak{B}$  de  $\mathfrak{A}$  commutative telle que, pour toute sous-algèbre commutative  $S$  de  $\mathfrak{A}$ , on ait :

$$\mathfrak{B} \subset S \implies \mathfrak{B} = S.$$

## Exemples :

- $\mathfrak{A}$  commutative :  $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ .
- $\mathfrak{A} = M_n(\mathbb{C})$  :  $\mathfrak{B}$  = matrices diagonales.

Remarque : Il n'y a pas unicité !

## Définition

Soit  $S$  une partie de  $\mathfrak{A}$ . On appelle **centralisateur** de  $S$  dans  $\mathfrak{A}$  la sous-algèbre de  $\mathfrak{A}$  définie par :

$$\mathcal{C}(S, \mathfrak{A}) := \{x \in \mathfrak{A} \mid xy = yx, \quad \forall y \in S\}.$$

Remarque :  $\mathcal{C}(S, \mathfrak{A})$  n'est pas nécessairement commutative.

- 1 Généralités
  - Histoire
  - Définitions élémentaires
- 2 Résultats classiques
  - Un théorème fondamental
  - Cas du groupe symétrique
  - Exemples
- 3 Éléments de Jucys-Murphy
  - Idempotents d'une algèbre
  - Définition et exemples
  - L'exemple de  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ .
  - Cas de l'algèbre de Brauer
- 4 Étude d'une classe d'algèbres
  - Définition
  - Éléments candidats
- 5 Conclusion

## Théorème (Artin-Wedderburn, 1907)

Les algèbres semi-simples de dimension finie sont les sommes directes finies d'algèbres de la forme  $\text{End}(V)$ , où  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie. On a donc un isomorphisme d'algèbres :

$$\Phi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \text{End}(V^\lambda)$$

où  $\Lambda$  est un ensemble fini.

**Exemple :** Algèbre d'un groupe fini.

## Corollaire

Soit  $A$  une algèbre semi-simple de dimension finie. Alors on a l'égalité :

$$\dim(\mathfrak{A}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim(V^\lambda)^2.$$

## Corollaire (Dimension du centre)

$$\dim(Z(\mathfrak{A})) = |\Lambda|.$$

- 1 Généralités
  - Histoire
  - Définitions élémentaires
- 2 Résultats classiques
  - Un théorème fondamental
  - Cas du groupe symétrique
  - Exemples
- 3 Éléments de Jucys-Murphy
  - Idempotents d'une algèbre
  - Définition et exemples
  - L'exemple de  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ .
  - Cas de l'algèbre de Brauer
- 4 Étude d'une classe d'algèbres
  - Définition
  - Éléments candidats
- 5 Conclusion

## Définition

Soit  $\lambda \vdash n$ . On appelle **tableau standard** de forme  $\lambda$  tout remplissage bijectif des boîtes du tableau par les valeurs  $1, 2, \dots, n$  tel que les valeurs des boîtes selon les lignes et les colonnes sont croissants.

On note  $S\text{Tab}(\lambda)$  l'ensemble des tableaux standards de forme  $\lambda$ .

## Exemple :

- $\lambda = (3) \vdash 3$ . Forme : 

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|--|--|--|

 $\rightarrow$  1 seul tableau standard : 

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|

.

- $\lambda = (2, 1) \vdash 3$ . Forme : 

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |

 $\rightarrow$  2 tableaux standards : 

|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 3 |   |

 et 

|   |   |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 |   |

.

En revanche, 

|   |   |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 1 |   |

, 

|   |   |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 3 |   |

 $\notin S\text{Tab}((2, 1))$ .

- $\lambda = (2, 2) \vdash 4$ . Forme : 

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |

 $\rightarrow$  2 tableaux standards : 

|   |   |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 3 | 4 |

 et 

|   |   |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 4 |

.

## Théorème

Les représentations irréductibles de l'algèbre du groupe symétrique  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$  sont indexées par les partitions de  $n$ , i.e. :

$$\text{Irr}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n) = \{V_\lambda \mid \lambda \vdash n\}.$$

De plus,  $\dim(V_\lambda) = |\text{STab}(\lambda)|$ ,  $\lambda \vdash n$ .

## Exemples :

- $n = 3$  :  $\text{Irr}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_3) = \{V_{(3)}, V_{(2,1)}, V_{(1,1,1)}\}.$
- $n = 4$  :  $\text{Irr}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_4) = \{V_{(4)}, V_{(3,1)}, V_{(2,2)}, V_{(2,1,1)}, V_{(1,1,1,1)}\}.$

Pour  $\lambda = (3,1) \vdash 4$ , 

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 |   |   |

, 

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 |
| 3 |   |   |

, 

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 |
| 2 |   |   |

 sont les 3 seuls tableaux standards, donc  $\dim(V_{(3,1)}) = 3$ .

## Corollaire

Pour tout  $n \geq 1$ , on a l'isomorphisme d'algèbres suivant :

$$\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} M_{n_\lambda}(\mathbb{C}), \quad n_\lambda = |\text{STab}(\lambda)|.$$

**Question :** À quels éléments correspondent les matrices diagonales élémentaires ?

- 1 Généralités
  - Histoire
  - Définitions élémentaires
- 2 Résultats classiques
  - Un théorème fondamental
  - Cas du groupe symétrique
  - Exemples
- 3 Éléments de Jucys-Murphy
  - Idempotents d'une algèbre
  - Définition et exemples
  - L'exemple de  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ .
  - Cas de l'algèbre de Brauer
- 4 Étude d'une classe d'algèbres
  - Définition
  - Éléments candidats
- 5 Conclusion

## L'algèbre du groupe symétrique :

- $n = 3 : \mathbb{C}\mathfrak{S}_3 \cong \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_2(\mathbb{C})$ .
- $n = 4 : \mathbb{C}\mathfrak{S}_4 \cong \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})^{\oplus 2}$ .
- $n = 5 : \mathbb{C}\mathfrak{S}_5 \cong \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_4(\mathbb{C})^{\oplus 2} \oplus M_5(\mathbb{C})^{\oplus 2} \oplus M_6(\mathbb{C})$ .

Par exemple, pour  $n = 4$ ,

$$(1,2) \longmapsto 1 \oplus -1 \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2,3) \longmapsto 1 \oplus -1 \oplus \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Question :** Comment construire les représentations irréductibles d'une algèbre semi-simple ?

- 1 Généralités
  - Histoire
  - Définitions élémentaires
- 2 Résultats classiques
  - Un théorème fondamental
  - Cas du groupe symétrique
  - Exemples
- 3 Éléments de Jucys-Murphy
  - Idempotents d'une algèbre
  - Définition et exemples
  - L'exemple de  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ .
  - Cas de l'algèbre de Brauer
- 4 Étude d'une classe d'algèbres
  - Définition
  - Éléments candidats
- 5 Conclusion

Pour  $\lambda \in \Lambda$ , on note  $e_\lambda := \Phi^{-1}(0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus \text{Id}_{V^\lambda} \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0) \in \mathfrak{A}$  via l'isomorphisme :

$$\Phi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \text{End}(V^\lambda)$$

## Proposition

Les  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  satisfont :

$$e_\lambda^2 = e_\lambda, \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda = 1, \quad e_\lambda e_\mu = \delta_{\lambda, \mu} e_\lambda,$$

$$\forall a \in \mathfrak{A}, \quad ae_\lambda = e_\lambda a.$$

$\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \rightarrow$  système complet d'idempotents centraux orthogonaux.

Si  $\Phi(a) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ ,  $A_\lambda \in \text{End}(V^\lambda)$ , alors :

$$\Phi(ae_\lambda) = \Phi(a)\Phi(e_\lambda) = 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus A_\lambda \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0.$$

Donc  $\mathfrak{A}e_\lambda \simeq \text{End}(V^\lambda)$ .

Connaissance de  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \implies$  Construction des représentations irréductibles de  $\mathfrak{A}$ .

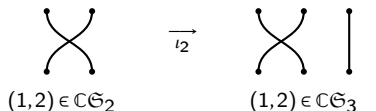
- 1 Généralités
  - Histoire
  - Définitions élémentaires
- 2 Résultats classiques
  - Un théorème fondamental
  - Cas du groupe symétrique
  - Exemples
- 3 Éléments de Jucys-Murphy
  - Idempotents d'une algèbre
  - **Définition et exemples**
  - L'exemple de  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ .
  - Cas de l'algèbre de Brauer
- 4 Étude d'une classe d'algèbres
  - Définition
  - Éléments candidats
- 5 Conclusion

## Définition

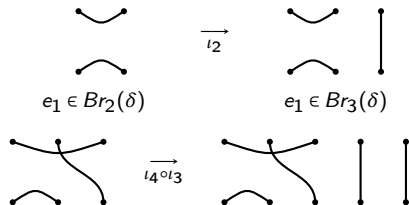
Une **chaîne d'algèbres** est la donnée d'une suite de paires  $(\mathfrak{A}_i, \iota_i)_{i \geq 0}$  telle que :

- $\mathfrak{A}_i$ ,  $i \geq 0$ , est une algèbre.
- $\iota_i : \mathfrak{A}_i \hookrightarrow \mathfrak{A}_{i+1}$  est un morphisme injectif d'algèbres.

**Exemples :** La chaîne d'algèbres du groupe symétrique  $(\mathbb{C}\mathfrak{S}_i, \iota_i)_{i \geq 0}$ .



La chaîne d'algèbres de Brauer  $(Br_i(\delta), \iota_i)_{i \geq 0}$ .



Soit  $(\mathfrak{A}_i, \iota_i)_{i \geq 0}$  une chaîne d'algèbres.

## Définition

On considère des éléments  $J_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  vérifiant :

- $J_i \in \mathfrak{A}_i$ ,  $i \geq 0$ .
- $J_i \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}_{i-1}, \mathfrak{A}_i)$ .
- L'algèbre engendrée par les  $\{J_i\}_{1 \leq i \leq n}$  est une sous-algèbre commutative maximale de  $\mathfrak{A}_n$ .  
Les éléments  $\{J_i\}_{1 \leq i \leq n}$  sont appelés **éléments de Jucys-Murphy** de l'algèbre  $\mathfrak{A}_n$ .

**Question :** Quelle sous-algèbre commutative engendrent-ils ?

Très compliqué en général ! Chaîne d'algèbres semisimples :  $\mathfrak{A}_n \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_{n_\lambda}(\mathbb{C})$ .

Les  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  engendrent  $Z(\mathfrak{A}_n)$ . A-t-on  $\langle J_i \mid i = 1, 2, \dots, n \rangle = Z(\mathfrak{A}_n)$  ?

$(\mathfrak{A}_i, \iota_i)_{i \geq 0}$  chaîne d'algèbres semi-simples.  $Z_i$  centre de  $\mathfrak{A}_i$ ,  $i \geq 0$ .

## Définition

On appelle algèbre de **Gelfand-Zetlin** de rang  $n$  la sous-algèbre de  $\mathfrak{A}_n$  définie par :

$$GZ(n) := \langle Z_i \mid i = 0, 1, \dots, n \rangle.$$

Remarque : L'algèbre est commutative.

En effet, si  $a \in Z_j$  et  $b \in Z_i$ ,  $i < j$ , alors  $a \in \mathfrak{A}_i$  donc  $ab = ba$ .

## Théorème

La sous-algèbre  $GZ(n)$  de  $\mathfrak{A}_n$  est une sous-algèbre commutative maximale.

**Exemple :**  $\mathfrak{A}_3 = \mathbb{C}\mathfrak{S}_3$   $Z_1 = \text{Vect}(\{1\})$ ,  $Z_2 = \text{Vect}(\{1, (1,2)\})$ ,

$Z_3 = \text{Vect}(\{1, (1,2) + (2,3) + (1,3), (1,2,3) + (1,3,2)\})$ .

Alors  $GZ(3) = \langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle$ .

$\dim(GZ(3)) = 4$  car  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_3 \simeq \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_2(\mathbb{C})$ .

- 1 Généralités
  - Histoire
  - Définitions élémentaires
- 2 Résultats classiques
  - Un théorème fondamental
  - Cas du groupe symétrique
  - Exemples
- 3 Éléments de Jucys-Murphy
  - Idempotents d'une algèbre
  - Définition et exemples
  - L'exemple de  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ .
  - Cas de l'algèbre de Brauer
- 4 Étude d'une classe d'algèbres
  - Définition
  - Éléments candidats
- 5 Conclusion

# L'exemple de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ .

Dans  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ , on définit les éléments :

$$J_1 = 0, \quad J_{i+1} = (i, i+1)J_i(i, i+1) + (i, i+1), \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

En particulier,  $J_i = \sum_{k=1}^{i-1} (k, i)$ . **Exemple** :  $n=3$  :

$$J_2 = \begin{array}{c} \text{diagram of a transposition (1,2)} \end{array}.$$

(1,2)

$$J_3 = \begin{array}{c} \text{diagram of a 3-cycle (1,2,3)} \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagram of a transposition (2,3)} \end{array}.$$

(1,3)                      (2,3)

Remarque :  $J_p = T_p - T_{p-1}$ , où  $T_p$  désigne la somme de toutes les transpositions de  $\mathfrak{S}_p$ .  
Comme  $T_p \in Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_p)$ , on a  $J_p \in \mathcal{C}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_{p-1}, \mathbb{C}\mathfrak{S}_p)$ .

## Proposition

Les éléments  $\{J_i\}_{1 \leq i \leq n}$  sont des éléments de Jucys-Murphy pour la chaîne d'algèbres  $\{\mathbb{C}\mathfrak{S}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ .

**Question :** Obtient-on les éléments  $e_\lambda$ ,  $\lambda \vdash n$  ?

## Théorème

Les éléments  $J_1, J_2, \dots, J_n$  engendrent l'algèbre du groupe symétrique, i.e. :

$$GZ(n) = \langle J_i \mid i = 1, 2, \dots, n \rangle$$

**Exemples :**  $GZ(3) = \langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle = \langle (1,2), (1,3) + (2,3) \rangle = \langle E_i \mid i = 1, \dots, 4 \rangle$ .

$GZ(4) = \langle Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \rangle = \langle (1,2), (1,3) + (2,3), (1,4) + (2,4) + (3,4) \rangle = \langle E_i \mid i = 1, \dots, 10 \rangle$ .

## Définition

Le **contenu** d'un tableau de Young  $t$  est l'entier :  $c_i(t) = y(i) - x(i)$ , où  $x(i)$  (resp.  $y(i)$ ) désigne sur quelle ligne (resp. sur quelle colonne) se situe l'entier  $i$ .

**Exemples**  $t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ ,  $c_1(t) = 0$ ,  $c_2(t) = 1$ ,  $c_3(t) = -1$ .

$s = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}$ ,  $c_1(s) = 0$ ,  $c_2(s) = 1$ ,  $c_3(s) = -1$ ,  $c_4(s) = 2$ ,  $c_5(s) = 0$ .

## Théorème

Soit  $\lambda \vdash n$ .

Il existe une base (appelée base de **Young**)  $\{v_t\}_{t \in STab(\lambda)}$  de  $V_\lambda$  telle que  $J_i = c_i(t)v_t$ . En particulier, il existe une base  $\{v_t\}_{t \in STab(n)}$  dans laquelle les  $J_i$  sont diagonales (via Artin-Wedderburn).

**Conséquence** : On va, à l'aide de cette base, construire récursivement notre système complet d'idempotents centraux orthogonaux.

## Définition

Notons  $\mathcal{C}_n := \{c_i(t) \mid 1 \leq i \leq n, t \in \text{STab}(n)\}$ .

On définit, pour  $t \in \text{STab}(n)$  :

$$F_t := \prod_{i=1}^n \prod_{\substack{c \in \mathcal{C}_n \\ c \neq c_i(t)}} \frac{J_i - c}{c_i(t) - c}.$$

## Théorème (Murphy)

$\{F_t\}_{t \in \text{Par}(n)}$  forme un système complet d'idempotents centraux orthogonaux.

En particulier, dans la base de Young  $\{v_t\}_{t \in \text{Std}(n)}$ , on a une correspondance bijective :

$$\{F_t \mid t \in \text{Std}(n)\} \longleftrightarrow \left\{ E_i \mid i = 1, 2, \dots, \sum_{\lambda \vdash n} n_\lambda \right\}.$$

## Corollaire

Pour  $n \geq 1$  et  $\lambda \vdash n$ , on a :

$$e_\lambda = \sum_{t \in \text{Std}(\lambda)} F_t.$$

On a  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_3 \simeq \mathbb{C}^{\oplus 2} \oplus M_2(\mathbb{C})$ .

- Soit  $\lambda = (3)$  : 1 seul tableau standard : 

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|

 $\rightarrow \dim(V_{(3)}) = 1$ . On cherche l'élément de  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_3$  correspondant à  $1 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On a  $J_1 = 0$ ,  $J_2 = 1 \oplus -1 \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et

$$J_3 = 2 \oplus -2 \oplus \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{J_2 - (-1)}{(1 - (-1))} = 1 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{(J_3 - (-1))}{2 - (-1)} = 1 \oplus 1 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a finalement } \frac{J_2 - (-1)}{(1 - (-1))} \times \frac{(J_3 - (-1))}{2 - (-1)} = 1 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_{(3)}.$$

- $\lambda = (1, 1, 1)$  : 1 seul tableau standard : 

|   |
|---|
| 1 |
| 2 |
| 3 |

 $\rightarrow \dim(V_{(1,1,1)}) = 1$ . On cherche l'élément de

$$\mathbb{C}\mathfrak{S}_3 \text{ correspondant à } 0 \oplus 1 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

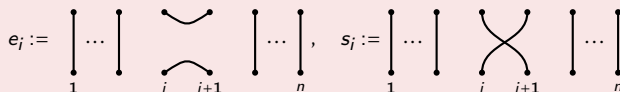
$$\frac{J_2 - 1}{(-1 - 1)} = 0 \oplus 1 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{(J_3 - 1)}{-2 - 1} = 1 \oplus 1 \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ On a finalement}$$

$$\frac{J_2 - 1}{(1 - (-1))} \times \frac{(J_3 - 1)}{-2 - 1} = 0 \oplus 1 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_{(1,1,1)}.$$

- 1 Généralités
  - Histoire
  - Définitions élémentaires
- 2 Résultats classiques
  - Un théorème fondamental
  - Cas du groupe symétrique
  - Exemples
- 3 Éléments de Jucys-Murphy
  - Idempotents d'une algèbre
  - Définition et exemples
  - L'exemple de  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ .
  - Cas de l'algèbre de Brauer
- 4 Étude d'une classe d'algèbres
  - Définition
  - Éléments candidats
- 5 Conclusion

## Définition

Pour  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , on considère les diagrammes :



L'algèbre de Brauer  $Br_n(\delta)$  est l'algèbre engendrée par les  $e_i$  et  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

## Définition

On définit, dans  $Br_n(\delta)$ , les éléments suivants :

$$M_1 = 1, \quad M_{i+1} = s_i M_i s_i + s_i - e_i.$$

En particulier,  $M_n = J_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k s_{k+1} \dots s_{n-1} e_{n-1} s_{n-1} \dots s_{k+1} s_k$ .

## Proposition

Les éléments  $\{M_i\}_{1 \leq i \leq n}$  sont des éléments de Jucys-Murphy pour la chaîne d'algèbres  $\{Br_i(\delta)\}_{1 \leq i \leq n}$ .

- 1 Généralités
  - Histoire
  - Définitions élémentaires
- 2 Résultats classiques
  - Un théorème fondamental
  - Cas du groupe symétrique
  - Exemples
- 3 Éléments de Jucys-Murphy
  - Idempotents d'une algèbre
  - Définition et exemples
  - L'exemple de  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ .
  - Cas de l'algèbre de Brauer
- 4 Étude d'une classe d'algèbres
  - Définition
  - Éléments candidats
- 5 Conclusion

$n = 3, \underline{k} = (2, 2, 2) :$



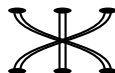
1



$\sigma_1$



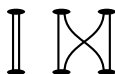
$\sigma_2$



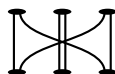
$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1$



$X_{1,2}$



$X_{2,3}$



$X_{1,3}$

**Définition (Sous-algèbre de  $H_{\underline{k},n}(1)$ )**

On définit la sous-algèbre de  $H_{\underline{k},n}(1)$  suivante :

$$\tilde{H}_{\underline{k},n} = \langle X_{i,j} \mid i \neq j, i, j = 1, \dots, n \rangle.$$



$\notin \tilde{H}_{2,3}.$

- 1 Généralités
  - Histoire
  - Définitions élémentaires
- 2 Résultats classiques
  - Un théorème fondamental
  - Cas du groupe symétrique
  - Exemples
- 3 Éléments de Jucys-Murphy
  - Idempotents d'une algèbre
  - Définition et exemples
  - L'exemple de  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ .
  - Cas de l'algèbre de Brauer
- 4 Étude d'une classe d'algèbres
  - Définition
  - Éléments candidats
- 5 Conclusion

## Définition

Dans  $H_{2,n}$ , on définit les éléments :

$$J_1 = 0, \quad J_{i+1} = \sigma_{i+1} J_i \sigma_i + X_{i,i+1}.$$

On a donc  $J_i = \sum_{k=1}^{i-1} X_{k,i}$ .

**Exemple :** Pour  $n = 3$  :

$$J_2 = \begin{array}{c} \text{Diagram of } X_{1,2} \end{array} \quad J_3 = \begin{array}{c} \text{Diagram of } X_{2,3} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram of } X_{1,3} \end{array}$$

$X_{1,2}$ 
 $X_{2,3}$ 
 $X_{1,3}$

## Proposition

Pour tout  $i \geq 0$ ,  $J_i \in H_{2,i}$ . De plus,  $J_i \in \mathcal{C}(H_{2,i-1}, H_{2,i})$ .

**Question :** L'algèbre engendrée par les  $J_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est-elle maximale en tant qu'algèbre commutative ? On ne sait pas si cette algèbre est semi-simple !

- Objets combinatoires liés aux éléments de Jucys-Murphy (tableaux standards).
- Construction des idempotents des algèbres du groupe symétrique et de Brauer.
- Construction des représentations irréductibles.
- Montrer que l'ensemble d'éléments candidats engendre une sous-algèbre commutative maximale.
- Trouver un objet combinatoire pour indexer une base de la sous-algèbre de l'algèbre des permutations fusionnées.
- Jucys-Murphy pour l'algèbre des permutations fusionnées.

Merci pour votre attention !

-  M. Nazarov, *Young's orthogonal form for Brauer's centralizer algebra*, 2024, arXiv:2404.01821.
-  S. Lang, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer.
-  R. Goodman, N. Wallach, *Symmetry, Representations and Invariants*, Springer, 2009.
-  A. Kleshchev, *Linear and projective representations of symmetric groups*, Cambridge University Press, 2005.
-  L. Poulain d'Andecy, *Centralisers and Hecke algebras in Representation Theory, with applications to Knots and Physics*, 2023, arXiv:2304.00850.
-  N. Crampé, L. Poulain d'Andecy, *Fused braids and centralisers of tensor representations of  $U_q(\mathfrak{gl}_N)$* , Algebr. Represent. Theor. 2022, arXiv:2001.11372.
-  M. Geick, G. Pfeiffer, *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke Algebras*, Clarendon press, Oxford, 2000.
-  A.I. Molev, *On the fusion procedure for the symmetric group*, 2006, arXiv:math/0612207v5.